Partiel du 6 novembre 2019

Exercice 1

Soit $E = \ell^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_n$ de carré sommable muni de la norme $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2}$, et

$$C = \{v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq v_{n+1} \leq v_n\}$$

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $]-\pi;\pi]$.
2. Montrer que C est une partie convexe complète de E.
3. Soit u définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Déterminer la projection de u sur C.
4. En déduire la valeur de $\mathrm{dist}(u, C)$.

Exercice 2

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. On munit l'espace produit $E \times F$ de la norme $\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$, *qui en fait un espace de Banach.*

Pour une application $f : E \to F$, on note $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ son graphe.

1. Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé dans $E \times F$.
2. Donner un contre-exemple à la réciproque de ce résultat dans le cas $E = F = \mathbb{R}$ *(on pourra penser à une hyperbole...).*
3. On suppose maintenant que f est *linéaire* et que Γ_f est fermé dans $E \times F$, et on définit $N(x) = \|x\|_E + \|f(x)\|_F$ pour tout $x \in E$.
   (a) Montrer que (E, N) est un espace de Banach.
   (b) Vérifier que l'application $\iota : (E, N) \to (E, \|\cdot\|_E)$ définie par $\iota(x) = x$ est continue. En déduire que les normes N et $\|\cdot\|_E$ sont équivalentes.
   (c) Montrer que f est continue.
4. On prend ici E l'ensemble des fonctions continues sur $[0; 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$, F l'ensemble des fonctions continues sur $[0; 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $f : E \to F$ l'application identité.
   (a) Exhiber une suite de Cauchy non convergente dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
   (b) Montrer que Γ_f est fermé dans $E \times F$, mais que l'application linéaire f n'est pas continue.

Exercice 3

Soit (K, d) un espace métrique compact, et $a \in K$ fixé. On suppose que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall x_1 \neq x_2,\ \exists f \in \mathcal{A} \mid f(x_1) \neq f(x_2) \\ \forall f \in \mathcal{A},\ f(a) = 0 \end{cases}$$

1. Donner un exemple pour $\mathcal{A}$ lorsque $K = [-1; 1]$ et $a = 0$.
2. Déterminer l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.