Examen du 6 janvier 2020
durée 3h

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x \geq 0$, la suite $(f(kx))_k$ est bornée.

1. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $F_N := \{x \geq 0 \mid \forall k \in \mathbb{N},\ |f(kx)| \leq N\}$. Vérifier que F_N est fermé dans $\mathbb{R}^+$ et que $\bigcup_N F_N = \mathbb{R}^+$.
2. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et $0 < a < b$ tels que
$$\forall x \in]a; b[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f(kx)| \leq N_0$$
3. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2
Soit $a > 0$ fixé. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $g(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ et $h(x) = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}$.

1. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\widehat{g}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-ixt} \mathrm{d}t = h(x)$.
2. Vérifier que g induit une distribution tempérée, notée T_g. Calculer $(x^2 + a^2) \cdot T_g$.
3. On considère l'équation (E) : $u'' - a^2 u = \delta$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, où δ est la distribution de Dirac en 0.
   (a) Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est solution de (E) si et seulement si $(x^2 + a^2) \cdot \widehat{T} = -1$ au sens des distributions.
   (b) En déduire les solutions de (E).
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction $h * f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, et qu'elle est solution de l'équation $u'' - a^2 u = -2\pi f$.
   (b) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $h * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. On note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire hermitien (linéaire par rapport à la seconde variable).

1. Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une autre base hilbertienne de H, et $T \in \mathcal{L}_c(H)$.
   (a) Montrer que pour tout n, $\|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle\varepsilon_k|T(e_n)\rangle|^2$.
   (b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^*(\varepsilon_k)\|^2 \leq +\infty$.
   (c) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(\varepsilon_k)\|^2$.
2. On note $\mathcal{HS}(H) := \left\{ T \in \mathcal{L}_c(H) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty \right\}$ l'ensemble des *opérateurs de Hilbert-Schmidt*, et pour $T \in \mathcal{HS}(H)$ on pose $\|T\|_{\mathcal{HS}} := \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2}$. D'après la question 1., ces définitions sont indépendantes du choix de la base hilbertienne (e_n).
   (a) Exhiber un élément de $\mathcal{L}_c(H)$ qui n'est pas un opérateur de Hilbert-Schmidt.
   (b) Soit $T \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\operatorname{Im} T$ est de dimension 1. Montrer T est un opérateur de Hilbert-Schmidt (on pourra construire à partir de $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ une base hilbertienne adaptée).
3. On prend ici $H = L^2(\mathbb{R})$ et $\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x$. On notera $\langle\cdot|\cdot\rangle_2$ le produit hermitien sur $L^2(\mathbb{R}^2)$: $\langle F|G\rangle_2 = \int\int_{\mathbb{R}^2} \overline{F(x,y)}\, G(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   Pour tout $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on pose

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

   (a) Montrer que cette définition a bien un sens et que $T_K \in \mathcal{L}_c(H)$ pour tout $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$.
   (b) Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on pose $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e_{n,p}(x,y) = e_n(x)\overline{e_p(y)}$. Pour $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$, exprimer $\langle e_{n,p}|K\rangle_2$ en fonction de T_K. En déduire que $(e_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$.
   (c) En calculant $\|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, montrer que T_K est un opérateur de Hilbert-Schmidt. En déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & L^2(\mathbb{R}^2) & \to & \mathcal{HS}(H) \\ & K & \mapsto & T_K \end{array}$$

   est une isométrie.
   (d) Montrer que ϕ est surjective (rechercher un antécédent de T sous la forme $K = \sum_{n,p} \langle e_n|T(e_p)\rangle\, e_{n,p}$).