Analyse

—

FICHE 5 : DISTRIBUTIONS

Exercice 1. Soit

$$r(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que $r \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $s_{a,b}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $s_{a,b}(x) = r(x-a)r(b-x)$. Montrer que $s_{a,b}$ est de classe C^∞, que pour tout $t \in]a, b[$, on a $s(t) > 0$ et que $\mathrm{supp}(s) = [a, b]$.
3. Soit $a < a' < b' < b$ et θ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\theta(x) = \frac{s_{a,b}(x)}{r(x-b')+s_{a,b}(x)+r(a'-x)}$. Montrer que θ est de classe C^∞, que $\mathrm{supp}(\theta) = [a, b]$, que $\theta(x) = 1$ pour tout $x \in [a', b']$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$.

Exercice 2. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$, $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\psi \equiv 1$ sur $[-1/4, 1/4]$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par $\varphi_k(x) = \varphi(x)\psi(x/k)$, converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) = 0$. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = x\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que pour toute fonction $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\rho(0) = 1$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = \varphi(0)\rho(x) + x\psi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.
Soit (a_k) une suite de nombres complexes telles qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ et une constante $C > 0$ tels que $|a_n| \leqslant C(1+n)^p$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer alors que T définie pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi(n)$ définit une distribution tempérée.

Exercice 5. On note $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, autrement dit, l'ensemble des fonctions mesurables f telles que pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\int_K |f(x)|dx$ est fini.

1. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. Montrer que T_f, la distribution régulière associée à f, est une distribution tempérée.
2. En déduire que les distributions régulières associées à $|\cdot|$ et à tout polynôme sont des distributions tempérées. Calculer leurs dérivées premières et secondes.

Exercice 6. Soit $]a, b[$ un intervalle non vide et f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$. Soit $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision adaptée à f (autrement dit f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur tout intervalle $[a_k, a_{k+1}]$).

1. Montrer que T_f, la distribution régulière associée à f est une distribution tempérée.
2. Montrer que

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n-1}(f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i} + f(a^+)\delta_a - f(b^-)\delta_b$$

où $f(\alpha^+) = \lim_{\substack{t\to\alpha \\ t>\alpha}} f(t)$ et $f(\alpha^-) = \lim_{\substack{t\to\alpha \\ t<\alpha}} f(t)$.

Exercice 7. Montrer que si $(T_n)_n$ est une suite de distributions tempérées qui converge vers T alors $(T_n')_n$ converge vers T'.

Exercice 8.

1. Soit $f : x \mapsto \ln|x|$. Vérifier que T_f est une distribution tempérée.
2. Montrer que $\langle T_f', \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$. La distribution T_f' est la distribution appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$. On la note $\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Montrer que $x \cdot \mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ au sens des distribution, autrement dit, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\langle x \cdot \mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$.
4. Soit T une distribution tempérée telle que $xT = 0$. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi\rangle$ ne dépend que $\varphi(0)$ (utiliser l'exercice 3). En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que telle que $T = c\delta_0$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $x\delta_0^{(k+1)}$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $xT = \delta_0^{(k)}$.
   (c) Résoudre $x^2T = \delta_0$.
   (d) Résoudre $x^nT = \delta_0$.
6. Résoudre l'équation $xT = 1$.

Exercice 9. On veut résoudre dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $(E) : 2xT' - T = \delta_0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $2xy' - y = 0$.
2. Montrer que U_+ définie pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par $\langle U_+\phi\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\phi(x)dx$ est une distribution tempérée qui satisfait $2xU_+' - U_+ = 0$.
3. Montrer que U_- définie pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par $\langle U_-\phi\rangle = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\phi(x)dx$ est une distribution tempérée qui satisfait $2xU_-' - U_- = 0$
4. Soit $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $2xT' - T = 0$.
   (a) Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset]0, +\infty[$. Montrer que $\langle T, \sqrt{x}\phi'\rangle = 0$.
   (b) Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset]0, +\infty[$, $\langle S', \phi\rangle = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset]0, +\infty[$, $\langle S, \phi\rangle = c\int_0^{+\infty} \phi(t)dt$.
   (c) En déduire qu'il existe un réel c_+ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset]0, +\infty[$, $\langle T, \phi\rangle = c_+ \langle U_+, \phi\rangle$.
   (d) Montrer qu'il existe un réel c_- tel que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset]-\infty, 0[$, $\langle T, \phi\rangle = c_- \langle U_-, \phi\rangle$.
   (e) Soit $S = T - c_+U_+ - c_-U_-$. Justifier que S qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tel que $|\langle S, \phi\rangle| \leqslant c\mathcal{N}_k(\phi)$.
   (f) Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\phi(0) = \ldots = \phi^{(k)}(0) = 0$. Montrer que $\langle S, \phi\rangle = 0$. En déduire qu'il existe $s_0, \ldots, s_k \in \mathbb{R}$ tel que $S = \sum_{n=0}^k s_n\delta_0^{(n)}$.
   (g) Montrer que S satisfait $2xS' - S = 0$. En déduire que $S = 0$ et $T = c_+U_+ + c_-U_-$.
5. Montrer que δ_0 est une solution de (E).
6. Résoudre E.

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de la distribution δ_a.
2. En déduire les transformées de Fourier de $\delta_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer $\widehat{T_P}$ où T_P est la distribution régulière associée au polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
4. Jusitifer que les distributions régulières associées aux fonctions $f : x \mapsto \cos(ax)$ et $g : x \mapsto \sin(ax)$ sont des distributions tempérées.
5. Calculer alors les transformées de Fourier de f et de g au sens des distributions.

Exercice 11. Si φ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on note $\check{\varphi}$ la fonction définie par $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Par suite φ est paire si et seulement si $\check{\varphi} = \varphi$ et impaire si et seulement si $\check{\varphi} = -\varphi$.
Si T est une distribution tempérée, on définit $\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$. On dit que T est paire si $\check{T} = T$ et impaire si $\check{T} = -T$.

1. Soit f une fonction paire (respectivement impaire) localement intégrable telle que la distribution régulière T_f associée à f est tempérée. Montrer que T_f est paire (respectivement impaire).
2. Montrer que $\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)$ est impaire.
3. Montrer que si T est une distribution tempérée impaire, alors $\hat{T}$ est impaire.

Exercice 12. Le but de l'exercice est de calculer la transformée de Fourier de la distribution $\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Soit T une distribution tempérée telle que $T' = 0$.
   a. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$. Montrer que $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En déduire que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.
   b. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $T = c$ au sens des distributions (autrement dit $\langle T, \varphi\rangle = c\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$ pour tout φ).
   c. En déduire que si $T^{(n)} = 0$, où $T^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de T, alors il existe un polynôme P de degré au plus n tel que T soit la distribution régulière associée à P.
2. Soit $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside. Justifier que T_H est une distribution tempérée et calculer sa dérivée.
3. En utilisant l'égalité $x \cdot \mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telle que $\widehat{\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)} = \alpha T_H + \beta$ et préciser la valeur de α.
4. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est paire alors $\langle \widehat{\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)}, \varphi\rangle = 0$.
5. En déduire la valeur de β.

Exercice 13. On se propose de calculer la transformée de Fourier de la distribution $\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)$ par une deuxième méthode.

1. Soit $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\varepsilon > 0$ et $f_{\alpha,\varepsilon} : x \mapsto \frac{1}{x+i\alpha\varepsilon}$.
   (a) Montrer que la distribution régulière associée à $f_{\alpha,\varepsilon}$ est tempérée.
   (b) Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{1} f_{\alpha,\varepsilon}(x)dx$.
   (c) En déduire que $\left(T_{f_{\alpha,\varepsilon}}\right)_{\varepsilon>0}$ converge vers $\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\alpha\delta_0$ lorsque ε tend vers 0.
2. Soit $\lambda > 0$, $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside et $g_\lambda : x \mapsto H(x)e^{-\lambda x}$
   (a) Justifier que T_{g_λ} et T_H, les distributions régulières associées à g_λ et H sont des distributions tempérées.
   (b) Calculer $\widehat{T_{g_\lambda}}$.
   (c) En déduire $\widehat{T_H}$
3. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\check{\varphi}$ l'application définie par $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Montrer que $\langle \widehat{\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)}, \check{\varphi}\rangle = -\langle \widehat{\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)}, \varphi\rangle$.
4. En déduire $\widehat{\mathrm{V_p}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Exercice 14. (Transformée de Fourier de l'arctangente) On rappelle que $\widehat{\frac{1}{x^2+1}} = \pi e^{-|\xi|}$.

1. Montrer que $\xi\widehat{\arctan}(\xi) = -i\pi e^{-|\xi|}$.
2. On définit $T = \mathrm{V_p}\left(\frac{e^{-|x|}}{x}\right)$ en posant pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{e^{-|x|}}{x}\varphi(x)dx$. Montrer que T est une distribution tempérée et que T vérifie $xT = e^{-|x|}$ au sens des distributions.
3. En déduire $\widehat{\arctan}$.

4. En déduire la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 15.

1. Soit $a > 0$ et soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f(an) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que $\frac{f}{x-an}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire qu'il existe $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(h) = \mathrm{supp}(f)$ et
   $$f(x) = (1 - e^{\frac{2\pi}{a}ix})h(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
2. Soit χ la fonction définie par $\chi_a(x) = e^{\frac{2\pi}{a}ix}$, $x \in \mathbb{R}$. Soit $T \in S'(\mathbb{R})$ telle que $(1 - \chi_a)T = 0$.
   (a) Montrer que si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $f(an) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors on a $\langle T, f\rangle = 0$.
   (b) En déduire que T est une combinaison linéaire (infinie) de distributions de Dirac.
   Indication : on pourra considérer pour $k \in \mathbb{Z}$ des fonctions $\theta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée sur $]ak - a/4, ak + a/4[$ et telle que $\theta_k(ak) = 1$. Puis, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, considérer $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ak)\theta_k$.
3. On considère le peigne de Dirac défini par $W_a := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{an}$, c'est-à-dire
   $$\langle W_a, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(an), \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})).$$
   (a) Vérifier que W est une distribution tempérée.
   (b) Etant donnée, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_b T$ la distribution tempérée par
   $$\langle \tau_b T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-b}\varphi\rangle, \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})),$$
   où on rappelle que pour une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $(\tau_b\varphi)(x) = \varphi(x - b)$, $x \in \mathbb{R}$.
   Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\tau_{an}W_a = W_a$ et que $\chi_a W_a = W_a$.
   (c) Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\tau_{an}S = \chi_a S = S$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ telle que $S = cW_a$.
   Indication : on pourra utiliser la question 2.
   (d) En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{C}$ telle que
   $$\widehat{W_a} = \gamma_a W_{\frac{2\pi}{a}}.$$
   (e) En choisissant une gaussienne convenablement, calculer la constante γ_a dans la formule précédente, puis en déduire la formule sommatoire de Poisson :
   $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n), \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$