Analyse

—

FICHE 4 : ESPACE L^P, CONVOLUTION, TRANSFORMÉE DE FOURIER

Exercice 1. Soient f, $g \in L^3(\mathbb{R})$. Démontrer que $f^2 g$ est intégrable.

Exercice 2. Soit f une fonction mesurable.

1. Soit $1 \leqslant \alpha < \beta < \infty$. On suppose que f appartient à $L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^\beta(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $p \in [\alpha, \beta]$, $|f|^p \leqslant |f|^\alpha + |f|^\beta$. En déduire que $\{p \in [1, +\infty[,\ f \in L^p(\mathbb{R})\}$ est un intervalle.
2. Montrer que $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur son intervalle de définition.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et soit $g \in L^{p'}(\Omega)$ où p' est l'exposant conjuqué de p. Soit $T : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ défini par $T(f) = \int_\Omega f\overline{g} d\mu$.

1. Montrer que T est défini, continue et que $\|T\| \leqslant \|g\|_{p'}$.
2. En utilisant la fonction f définie par $f(x) = g(x)|g(x)|^{p'-2}$ si $g(x) \neq 0$, $f(x) = 0$ sinon, montrer que $\|T\| = \|g\|_{p'}$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. Soient a et b des réels et $f \in L^1(\mu)$ une fonction à valeurs réelles telles que pour tout $x \in X$, on ait $a < f(x) < b$. Soit ϕ une fonction convexe sur $]a, b[$. On rappelle que ϕ vérifie l'inégalité des trois pentes :

$$\forall x, y, z \text{ tels que } a \leqslant x < y < z \leqslant b, \text{ on a } \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \leqslant \frac{\phi(z) - \phi(x)}{z - x} \leqslant \frac{\phi(z) - \phi(y)}{z - y}.$$

1. Soit $m \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in]a, b[$, $\phi(t) \geqslant \alpha(t - m) + \phi(m)$.
2. Justifier que l'on peut choisir $m = \int_X f d\mu$ dans la question précédente.
3. Montrer que $\int_{\{\phi \circ f \leqslant 0\}} \phi \circ f d\mu > -\infty$. En déduire que soit $\phi \circ f$ appartient à $L^1(\mu)$, soit $\int_X \phi \circ f d\mu = +\infty$.
4. Établir l'inégalité de Jensen : $\int_X \phi \circ f d\mu \geqslant \phi\left(\int_X f d\mu\right)$.
5. Application : Montrer que, pour tous nombres réels positifs $y_1, y_2, \ldots, y_n$, on a

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in L^1(\mu)$ et pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$g_n(t) = \begin{cases} |f(t)| & \text{si } |f(t)| \leqslant n \\ n & \text{si } |f(t)| > n. \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $(g_n(x))_n$ est croissante et converge vers $|f(x)|$.

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon >$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_A |f(x)|\, d\mu(x) < \varepsilon.$$

Exercice 6. Soit $1 < p < \infty$. Le but de l'exercice est l'étude de l'application linéaire T définie par

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \qquad x > 0, f \in L^p(]0,+\infty[).$$

1. Vérifier que T est positive, i.e. pour tout f et g dans $L^p(]0,+\infty[)$, si $f \leqslant g$ alors $Tf \leqslant Tg$.
2. Supposons dans cette question que f est continue et positive. Notons $F(x) = Tf(x)$.
   a. Montrer que F est de classe C^1 et satisfait $F(x) + xF'(x) = f(x)$.
   On suppose aussi à partir de maintenant qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \geqslant M$.
   b. Montrer que $\lim_{x\to 0} xF^p(x) = 0$;
   c. Montrer que $\lim_{x\to +\infty} xF^p(x) = 0$;
   d. Montrer que
   $$\int_0^{+\infty} F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} F^{p-1}(x)f(x)dx.$$
   e. En déduire que $\|Tf\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
3. Montrer que si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^p(]0,+\infty[)$ alors $(Tf_n)_n$ converge simplement vers Tf presque partout.
4. En utilisant le lemme de Fatou, déduire des questions précédentes l'inégalité de Hardy : pour toute fonction $f \in L^p(]0,+\infty[)$, on a
   $$\|Tf\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$
5. Montrer que pour tout $f \in L^p(]0,+\infty[)$ à valeurs positives, on a
   $$\int_0^{+\infty} F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} F^{p-1}(x)f(x)dx.$$
   On rappelle que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de $L^p(]0,+\infty[)$ qui converge vers f dans L^p, alors il existe une fonction $\Phi \in L^p(]0,+\infty[)$ et une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge simplement vers f presque partout et satisfait $|f_{n_k}| \leqslant \Phi$.
6. En déduire qu'il y a égalité dans (4) si et seulement si $f = 0$ presque partout.
7. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = x^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{[1,n]}(x)$.
   a. Calculer $\|f_n\|_p$.
   b. Montrer que $\int_0^{+\infty} |Tf_n(x)|^p dx \geqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_1^n \frac{1}{x^p}\left(x^{\frac{p-1}{p}} - 1\right)^p dx$.
   c. Soit $\eta \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $x^{\frac{p-1}{p}} - 1 > \sqrt{\eta}x^{\frac{p-1}{p}}$.
   d. En déduire que pour tout $\eta \in]0,1[$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\|Tf_n\|_p}{\|f_n\|_p} \geqslant \frac{p}{p-1}\eta$.
   e. En déduire que $\|T\| = \frac{p}{p-1}$.
8. Montrer qu'il existe $f \in L^1(]0,+\infty[)$ tel que $T(f) \notin L^1(]0,+\infty[)$.

Exercice 7. Calculer $f * g$ pour les fonctions suivantes :

1. $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ et $g = \mathbb{1}_{[-a,a]}$, avec $a \geqslant 1$.
2. $f(x) = \exp(\alpha x)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ et $g(x) = \exp(\beta x)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$, avec α, β deux réels.

Exercice 8. Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de classe C^1, bornées et dont les dérivées sont bornées. On suppose que f et g' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^2.

Exercice 9. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue α-höldérienne, $\alpha \in]0,1]$ ($\exists C > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |g(x) - g(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$). Montrer que $f * g$ existe et est une fonction α-höldérienne.

Exercice 10.

1. Soient f et g deux fonctions mesurables à support dans $[0,+\infty[$ et localement bornées (autrement dit, bornées sur tout compact de $[0,+\infty[$). Montrer que le produit de convolution $f*g$ est bien défini.
2. Soit f mesurable à support dans $[0,+\infty[$ et localement bornée. On pose $f^{*n} = f*\ldots*f$ (n facteurs). Montrer que pour tout $a>0$, tout $x\in[0,a]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$|f^{*n}(x)| \leqslant (\sup_{[0,a]}|f|)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Exercice 11. Soit $\alpha>0$. Pour $x\in\mathbb{R}$, posons

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right).$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xG_\alpha(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2G_\alpha(x)\,dx = \alpha.$$

2. Montrer que pour tout $\alpha,\beta>0$, on a $G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}$.

Exercice 12. Pour $n\geqslant 1$, on définit $\phi_n : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ par

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n}(1-t^2)^n & \text{si } |t|\leqslant 1 \\ 0 & \text{si } |t|>1, \end{cases}$$

où $\alpha_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt$.

(a) Montrer que la suite $(\phi_n)_n$ est une approximation de l'identité.

(b) Soit $f\in C(\mathbb{R})$ vérifiant $f(x)=0$ si $x\notin I$, où $I=[-1/2,1/2]$. Montrer que $\phi_n * f$ est un polynôme sur I.

(c) En déduire le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions mesurables sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Soit $p\in[1,+\infty]$, p' l'exposant conjugué de p. Montrer que si f appartient à $L^p(\mathbb{R})$ et g à $L^{p'}(\mathbb{R})$ alors $f*g$ existe partout et vérifie $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_p\|g\|_{p'}$.
2. On suppose que f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f*g$ est défini presque partout, appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et vérifie $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$.
3. Soit $1<p<\infty$, $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $g\in L^p(\mathbb{R})$.

   (a) En écrivant $|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)||f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$, montrer que $f*g$ existe presque partout, est dans $L^p(\mathbb{R})$ et satisfait $\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p$.

   (b) Soit $T_g : L^1(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})$ l'opérateur de convolution défini pour $h\in L^1(\mathbb{R})$ par $T_g(h) = h*g$. Montrer que T_g est bien défini et continu. En testant T_g contre une suite régularisante, montrer que $\|T_g\| = \|g\|_p$.

   (c) Soit $S_f : L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})$ défini pour $h\in L^p(\mathbb{R})$ par $S_f(h) = f*h$. Si f est positive, en remarquant que la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{\|f\|_1}nf(nx)$ est une approximation de l'identité, montrer que $S_f : L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})$ est bien défini, continu et que $\|S_f\| = \|f\|_1$.

Exercice 14. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$.

1. Soit $(\rho_n)_n$ une approximation de l'identité. Montrer que $(f*\rho_n)_n$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$.

2. Pour $h \in \mathbb{R}$, exprimer la fonction $x \mapsto \int_x^{x+h} f(t)dt$ comme le produit de convolution de f par une fonction α_h.
3. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, et on pose $G_h(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$. Justifier que G_h converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ quand h tends vers 0.

Exercice 15. Soit $\lambda > 0$ et on pose

$$f(x) = e^{-\lambda|x|}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} d\,x, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x)x}{(1+x^2)^2} dx.$$

4. Calculer $f * f$. Calculer ainsi la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 16. Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction $f(t) = |t|e^{-\lambda|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer la transformée de Fourier F de f.
2. Montrer que $F \in L^1(\mathbb{R})$.
3. En déduire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2 - u^2}{(\lambda^2+u^2)^2} \cos(u/2)\, du = \frac{\pi}{4} e^{-\lambda/2}.$$

Exercice 17. Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions $u \in L^1(\mathbb{R})$ telles que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s)\, ds,$$

avec β un réel strictement positif.

1. Écrire cette équation à l'aide d'un produit de convolution.
2. En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in]0, 1/2[$; Montrer qu'alors cette solution est unique et la déterminer.

Exercice 18. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout t :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{f(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} + \frac{f(-\sqrt{u})}{\sqrt{u}} \right) e^{-iut} dt.$$

2. En déduire que $f \in L^1(\mathbb{R})$ est impaire si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx^2} dx = 0$.

Exercice 19. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi^2(t)dt = 1$.

1. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} t\phi'(t)\phi(t)dt = -\frac{1}{2}.$$

2. En déduire que

$$\left(\omega^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(t^2 |\phi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

3. Discuter le cas d'égalité.

Exercice 20.

1. En utilisant la transformée de Fourier, montrer que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'unité (i.e. il n'existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$).
2. Trouver toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant : $f * f = f$.

Exercice 21. Déterminer les couples $(f, c) \in (L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x + c)$.

Exercice 22. On note $C_0(\mathbb{R})$ les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ et en déduire celle de $\mathbb{1}_{[-n,n]}$.
2. Vérifier que $g_n := \mathbb{1}_{[-1,1]} * \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R})$.
3. Montrer l'existence de $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, telle que $\hat{f}_n = g_n$, et en déduire que $g_n \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $(g_n)_n$ est une suite bornée dans $C_0(\mathbb{R})$ (muni de la norme infinie).
5. Montrer que la suite $(f_n)_n$ n'est pas bornée dans $L^1(\mathbb{R})$.
   Indication : On utilisera le lemme de Fatou après un changement de variable approprié. On rappelle que le prolongement continu de $x \longmapsto \sin(x)/x$ n'est pas intégrable.
6. En déduire que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ est non surjective.
7. On va montrer cependant que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{|x|\to+\infty} x^2\hat{\phi}(x) = 0$. En déduire que $\hat{\phi}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$.
   (c) Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On fixe $M > 0$ tel que $|x| > M$, on ait $|f(x)| < \varepsilon/4$. Prouver l'existence de $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que
   $$\sup_{|x|<2M} |f(x) - g(x)| < \varepsilon/2.$$
   En déduire l'existence de $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - \phi\|_\infty < \varepsilon$ et conclure.
   Indication : considérer un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0, 1]$, égal à 1 sur $[-M, M]$ et à support dans $[-2M, 2M]$.

Exercice 23.

1. Montrer que la famille $(x^n e^{-x^2/2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $L^2(\mathbb{R})$ (on justifiera au préalable qu'elle appartient bien à $L^2(\mathbb{R})$).
2. Supposons qu'il existe une fonction $h \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\langle h, x^n e^{-x^2/2}\rangle = 0$ pour tout entier n.
   (a) Montrer que la transformée de Fourier de $x \longmapsto h(x)e^{-x^2/2}$ est bien définie, et est de classe C^∞. On note g cette transformée de Fourier. Que vaut $g^{(n)}(0)$?
   (b) Montrer que g s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
   (c) En déduire que $h = 0$. Conclusion ?
3. Démontrer qu'il existe une famille de polynômes H_n telle que le degré de H_n est n et la famille $(H_n(x)e^{-x^2/2})_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.
4. Montrer que la famille $(H_n(x)e^{-x^2/2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
5. Démontrer que les H_n sont égaux, à un coefficient près (que l'on ne demande pas de calculer) aux polynômes de Hermite
   $$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Exercice 24. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f.

2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx$.
   Indication : on pourra remarquer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 25. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Pour $g \in L^2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}(g)$ la transformée de Fourier-Plancherel de g.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.
2. En déduire que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, on a
$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\mathcal{F}(g).$$
   Indication : on pourra utiliser la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et le fait que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
3. Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = 2\pi\widehat{fg}.$$
4. On note $f_a(x) = \frac{\sin(\pi a x)}{\pi x}$. Déduire de la question précédente $f_a * f_b$, avec $a, b > 0$.
5. Montrer que l'équation $f * f = f$, où $f \in L^2(\mathbb{R})$, admet une infinité de solutions. Comparer avec l'exercice 20.

Exercice 26. - Espace de Wiener - On note $W = L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$, espace de Wiener constitué des fonctions intégrables qui sont également la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

1. Montrer que f appartient à W si et seulement si f et $\hat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $W \subset C_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en à l'infini.
3. Montrer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset \cap_{p \geqslant 1} L^p(\mathbb{R})$. En déduire que que $W \subset \cap_{p \geqslant 1} L^p(\mathbb{R})$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que f appartient à W si et seulement si $\hat{f}$ appartient à W.
5. Montrer que si $(f, g) \in W^2$ alors $f * g \in W$ et $fg \in W$.
6. Pour $f \in W$, on pose $N(f) = \|f\|_{L^1} + \|\hat{f}\|_{L^1}$. Montrer que N est une norme sur W.
7. Montrer que W muni de la norme N est un espace de Banach.
8. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est inclus dans W. En déduire que W est dense dans L^p pour $p \in [1, +\infty[$.
9. Montrer que W est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme.

Exercice 27. (Formule sommatoire de Poisson) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. On suppose que f satisfait les deux conditions suivantes :

(i) il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que
$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{(1 + |x|)^\alpha}, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(ii) la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ converge.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. On note F la somme de cette série. En déduire que F est continue et 1-périodique.
2. Montrer que $c_n(F) := \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi t} dt = \hat{f}(n)$.
3. En déduire que
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n).$$