Analyse

—

FICHE 3 : ESPACES DE HILBERT

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas un espace pré-hilbertien si $p \neq 2$.
2. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ n'est pas un espace pré-hilbertien si $p \neq 2$.
3. Montrer que $C([0,1]), \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas un espace pré-hilbertien.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert réel.

1. Si $H = \mathbb{R}^2$, déterminer T linéaire et continue sur H tel que $\langle Tx, x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$ (faire un dessin !).
2. Généraliser à H de dimension supérieure ou égale à 2.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \to H$ une application linéaire. On suppose que pour tout $y \in H$, l'application $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ est continue. Montrer que T est continue.

Exercice 4. (Test de Schur) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est σ finie (pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $E_n \in \mathfrak{B}$ tels que $\mu(E_n) < \infty$ et $\Omega = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$). Soit K un noyau positif sur Ω , c'est à dire une application $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $K(x,y) \geqslant 0$ pour tout x et tout y dans Ω. On définit alors l'opérateur linéaire T en posant pour f mesurable et $x \in \Omega$ tel que $y \mapsto K(x,y)f(y)$ est intégrable :

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

On suppose que qu'il existe deux fonctions p et q mesurables strictement positives et deux réels α, $\beta > 0$ tels que

$$\int_\Omega K(x,y)q(y)d\mu(y) \leqslant \alpha p(x),$$
$$\int_\Omega K(x,y)p(x)d\mu(x) \leqslant \beta q(y).$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et tout $x \in \Omega$,
$$|Tf(x)|^2 \leqslant \alpha p(x) \int_\Omega \frac{K(x,y)f^2(y)}{q(y)} d\mu(y).$$
2. En déduire que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est continu et que $\|T\| \leqslant \sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer qu'on défini un opérateur borné $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ en posant pour $x = (x_i)_i \in \ell^2(\mathbb{N})$:
$$(Tx)_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i+j+1} x_j$$
et que $\|T\| \leqslant \pi$ (considérer p et q définies par $p(k) = q(k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$).

Exercice 5. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Soit B la boule unité fermée de H.

1. Montrer que B est un ensemble convexe et fermé de H.
2. Déterminer $P_B(x)$.

Exercice 6. Soit $H = \mathbb{R}$ avec le produit scalaire usuel. Soit $A = [a, +\infty)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant la caractérisation variationnelle, montrer que $P_A(x) = x$ si $x \geq a$ et $P_A(x) = a$ si $x < a$.
2. Même question pour $B = [a, b]$, $a < b$.

Exercice 7. Soit $H = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit

$$C = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n)\}.$$

1. Montrer que C est un ensemble convexe et fermé de H.
2. Déterminer $P_C(x)$.
3. Soit l'espace de Hilbert complexe $H = \mathbb{C}^n$, muni du produit scalaire canonique. On pose

$$D = \{(z, z, \cdots, z) : z \in \mathbb{C}\}.$$

   Calculer $P_D(x)$.

Exercice 8.

1. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $K = \{x \in H : x_n \geq 0 \ \forall n\}$. Déterminer la projection p_K de H sur K et en déduire la distance $dist(x, K)$, $x \in H$.
2. Soit $E = C([0, 1])$, muni de la norme sup. Soit $C = \{f \in E : f(1/2) = 1\}$.
   (a) Montrer que C est un ensemble convexe et fermé. calculer $d(0, C)$.
   (b) Caractériser $\{f \in C : d(0, C) = d(0, f)\}$.

Exercice 9. Soit $E = C[0, 1]$ muni du produit scalaire de $L^2[0, 1]$. Soit $a \in]0, 1[$. Notons par $F_a = \{f \in E;\ f_{|[0,a]} = 0\}$.

1. Montrer que F_a est fermé dans E et déterminer $F_a^\perp$.
2. Montrer que $F_a \oplus F_a^\perp \neq E$.
3. Expliquer

Exercice 10. Soit P et Q deux projections orthogonales définies sur H. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $PQ = QP = P$;
(ii) $\text{Im}\ (P) \subset \text{Im}\ (Q)$;
(iii) $\ker(Q) \subset \ker(P)$;
(iv) $(Px, x) \leq (Qx, x), \quad \forall x \in H$;
(v) $\|Px\| \leq \|Qx\|, \quad \forall x \in H$.

Exercice 11. (Théorème de Lax-Milgram)
Soit H un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire a sur H et on suppose qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \text{et} \quad a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad (x, y \in H).$$

1. Montrer l'existence d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $a(x, y) = \langle Tx, y \rangle$ pour $x, y \in H$.
2. Montrer que $T(H)$ est dense dans H.
3. Montrer que $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ pour tout $x \in H$. En déduire que T est injectif à image fermée.

4. En déduire que T est un isomorphisme de H sur lui même.
   Soit maintenant L une forme linéaire continue sur H.
5. Montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $L(y) = a(u, y)$ pour tout $y \in H$.
6. On suppose que a est symétrique. Soit $\Phi(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - L(x)$. Montrer que le point u vérifie $\Phi(u) = \min_{x \in H} \Phi(x)$.

Exercice 12. (Polynômes de Legendre) On munit $L^2([-1, 1])$ du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$,

$$P_n(x) = \frac{d^n}{d\,x^n}\left(\left((x^2 - 1)^n\right)\right).$$

1. Calculer P_0, P_1, P_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P_n, P \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \frac{\partial^n P}{\partial x^n}(x)dx$. En déduire que pour tout n, P_n est orthogonal $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\|P_n\|_2$.
4. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n$.
5. Montrer que $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1, 1])$.
6. Calculer
$$\min\left\{\int_{-1}^{1} \left|x^2 - a - bx\right|^2 dx : (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
   et
$$\min\left\{\int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 dx : (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\right\}.$$

Exercice 13. Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset H_1$ et $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset H_2$ deux suites orthonormales. Soit enfin $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrer que la formule

$$Tx := \sum_{i=0}^{\infty} a_i \langle x, e_i \rangle f_i$$

définit un opérateur borné $T : H_1 \to H_2$. Calculer $\|T\|$ et déterminer T^*.

Exercice 14.

1. Montrer que la formule
$$Af(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$$
   définit un opérateur borné $A : L^2(]0, +\infty[) \to L^2(]0, +\infty[)$ avec $\|A\| \leqslant 2$ (utiliser le test de Schur avec $p(x) = q(x) = x^{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$ bien choisi).
2. Montrer que $\|A\| = 2$ (considérer $f_\beta(t) = \mathbb{1}_{]0,1]}(t)t^{-\beta}$, $\beta > 0$).
3. Déterminer l'adjoint de A.

Exercice 15. Soit $P \in \mathcal{L}(H)$ tel que $P^2 = P$, $P \neq 0$ et soit M l'image de P.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) P est la projection orthogonale sur M ;
   (ii) $\|P\| = 1$;
   (iii) $\forall x \in H, |(Px, x)| \leq \|x\|^2$.
   (Indication : Pour (iii) implique (i), considérer $(P(x + ty), x + ty)$, où $x \in M$, $y \in M^\perp$ et $t > 0$).
2. Montrer que P est la projection orthogonale sur M si et seulement si P est auto-adjointe, i.e. $P^* = P$.

Exercice 16. Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. Le spectre de T est

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

1. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|S\| < 1$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in H$, $\sum_{n\geqslant 0} S^n x$ converge.
   (b) Calculer $(S-I)(\sum_{n=0}^{\infty} S^n(x))$. En déduire que $S-I$ est inversible.
   (c) En déduire que $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$.
   (d) En déduire que l'ensemble des opérateurs linéaires inversibles est ouvert
   (e) En déduire que le spectre est compact.
2. Si T est inversible, montrer que $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

Exercice 17. Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. On appelle spectre de T l'ensemble

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

1. (a) Montrer que $\forall x, y \in H$.

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) + i(T(x+iy), x+iy) - i(T(x-iy), x-iy)].$$

   (b) Montrer que $\|T\| \leqslant 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle|,\ \|x\| = 1\}$.
   (c) En déduire que si $\forall x \in H$, $(Tx, x) = 0$ alors $T = 0$.
2. Montrer que : $[\forall x \in H, (Tx, x) \in \mathbb{R}]$ si et seulement si $T = T^*$.
3. Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $C > 0$ tel que pour tout $x \in H$, $\|x\| \leqslant C\|Tx - \lambda x\|$, alors $T - \lambda Id$ est injectif et $\operatorname{Im}(T - \lambda Id)$ est fermé. Si de plus T est autoadjoint, montrer que $\operatorname{Im}(T - \overline{\lambda} Id)$ est dense.
4. En déduire que si T est autoadjoint, alors $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (calculer $|\langle (T - \lambda Id)x, x\rangle|^2$ pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).
5. En utilisant la question 3, montrer qu'il existe une suite $(u_n)_n \subset H$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|Tu_n - \lambda u_n\| = 0$ et $\|u_n\| = 1$. En déduire que si, $\forall x \in H$, $(Tx, x) \geqslant 0$ alors $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Exercice 18. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

1. Soit $U : H \to H$ une application linéaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   (i) U est une isométrie (i.e. $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$) ;
   (ii) $(Ux, Uy) = (x, y)$ pour tout $(x, y) \in H^2$;
   (iii) $U^*U = I$.
2. Montrer que U est unitaire (i.e. $U^{-1} = U^*$) si et seulement si U est une isométrie surjective et si et seulement si U est une isométrie qui commute avec son adjoint.
3. On suppose que H est séparable. Justifier que l'image par l'unitaire U d'une base hilbertienne est de nouveau une base hilbertienne.
4. Montrer que si U est unitaire alors $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.
   Indication : utiliser l'exercice 16.

Exercice 19. Soit f la fonction paire 2π-périodique avec $f(x) = \pi - 2x$ sur $[0, \pi]$.

1. Donner le graphe de f.
2. Déterminer la série de Fourier $\hat{f}$ associée à f.
3. Étudier la convergence de $\hat{f}$ vers f.
4. Déduire de la question 3 ci-dessus la valeur des séries suivantes : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire et 2π-périodique définie par

$$f(x) = x(x - \pi) \qquad \text{pour } x \in [0, \pi[.$$

1. La série de Fourier associée à f converge-t-elle ? Si oui, quelle est la fonction limite et en quel sens la convergence a-t-elle lieu ? (On donnera en le justifiant le résultat le plus fort possible).

2. Calculer le développement en séries de Fourier de f.
3. Calculer la valeur de la somme $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
4. Calculer la valeur de la somme $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 21. Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = x^2 \text{ pour } -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

1. Représenter le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ? En quel(s) sens ?
3. Calculer le développement en série de Fourier de f (en cosinus et sinus ou exponentielles complexes, selon votre préférence).
4. En déduire les identités $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi}{12}$.
5. Toujours à l'aide du développement de f en série de Fourier, établir l'identité $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 22. Soit $\delta \in]0, \pi[$.

1. Montrer en considérant la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = 1$ si $|x| \leq \delta$ et $f(x) = 0$ si $\delta < |x| \leq \pi$ l'identité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi-\delta}{2}$.
2. Déduire ensuite de l'identité de Parseval $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi-\delta}{2}$.
3. En faisant tendre δ vers 0, déduire enfin l'égalité $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.