Analyse

—

FICHE 2 : THÉORÈMES FONDAMENTAUX D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Exercice 1. Montrer que les espaces suivants sont complets :

1. le graphe $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ;
2. l'espace des fonctions lipschitziennes de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N_\lambda(f) := \operatorname*{Sup}_{x \in [0;1]} \left| f(x) e^{-\lambda x} \right|$$

1. Montrer que (E, N_λ) est un espace de Banach.
2. Soit $f_0 \in E$: montrer qu'il existe un unique élément $f \in E$ tel que

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = f_0(x) + \int_0^x f(t^2)\, \mathrm{d}t$$

(indication : on pourra se placer dans (E, N_λ) avec λ assez grand).

Exercice 3. Soit (E, d) un espace métrique complet, et $(F_n)_n$ une suite de fermés de E telle que $E = \bigcup_n F_n$. Montrer que $\Omega = \bigcup_n \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense de E.

Exercice 4. (Base de Hamel et forme linéaire discontinue)
Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble un espace vectoriel E. On dit que $\mathcal{B}$

— est *libre* si toute famille finie de vecteurs de $\mathcal{B}$ est libre au sens usuel,

— *engendre* E si $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$, où

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k : a_k \in \mathbb{K}, x_k \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

— est une *base algébrique* ou *base de Hamel* de E si tout vecteur $x \in E$ peut être exprimé de façon unique comme une combinaison linéaire finie de certains éléments de $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

pour certains scalaires non nuls $a_k \in \mathbb{K}$ et vecteurs $x_k \in \mathcal{B}$.

Nous utiliserons dans cet exercice le

Lemme de Zorn : Tout ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide, totalement ordonnée, est majorée, possède au moins un élément maximal.

Rappelons que si $(A, \prec)$ est un ensemble ordonné, une B une partie de A est dite

— *totalement ordonnée* si pour tout $a, b \in B$ on a $a \prec b$ ou $b \prec a$. ,

— *majorée* s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $b \in B$, $b \prec a$.

Enfin, α est un élément de A est dit maximal si pour tout $a \in A$, $\alpha \prec a$ implique $a = \alpha$.

1. On suppose ici que $E = \mathbb{R}[X]$.
   a. Donner une base algébrique de E.
   b. Montrer que E n'est pas complet pour la norme $\| \sum a_i X^i \| := \max |a_i|$.
   c. Montrer, à l'aide du théorème de Baire, que E n'est complet pour aucune norme.
2. On se donne maintenant E un espace vectoriel quelconque.
   a. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      (i) $\mathcal{B}$ est une base de Hamel,
      (ii) $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble libre maximal au sens de l'inclusion , i.e. si $\mathbb{B}' \subset E$ est libre et si $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ alors $\mathbb{B} = \mathbb{B}'$,
      (iii) $\mathcal{B}$ est libre et engendre E.
   b. Montrer que si $\mathcal{B}'$ est une partie libre de E, alors il existe une base de Hamel $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.
   c. En déduire que tout espace vectoriel E admet une base de Hamel.
   d. Montrer que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E admet un supplémentaire algébrique G, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel G tel que
   $$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad F + G = E.$$
   e. Montrer que si E est un espace de Banach de dimension infinie, toute base de Hamel de E est nécessairement non dénombrable.
   f. Montrer que si E est normé et de dimension infinie, il existe une forme linéaire discontinue.

Exercice 5. Soit E un espace de Banach et $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que

$$\forall x \in E,\ \exists n_x \mid \varphi^{n_x}(x) = 0$$

Montrer que φ est nilpotente, *i.e.* qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^n(x) = 0$.

Exercice 6. Soit $1 \leqslant p$ et $\varphi = (\varphi_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que pour toute suite $a \in \ell^p(\mathbb{N})$, on a $\varphi \cdot a \in \ell^p(\mathbb{N})$, où on note $\varphi \cdot a = (\varphi_n a_n)_n$.

1. Montrer que l'application $T : \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$, définie par $T(a) = \varphi \cdot a$, est linéaire et continue.
2. En déduire que $\varphi \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Exercice 7. Montrer la version suivante du théorème de Banach-Steinhaus : si E est un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F, alors

i) ou bien $\operatorname*{Sup}_\alpha |||\varphi_\alpha||| < +\infty$,

ii) ou bien $\{x \mid \operatorname*{Sup}_\alpha \|\varphi_\alpha(x)\| = +\infty\}$ est dense dans E.

Indication : on pourra supposer que ii) n'est pas satisfaite et introduire

$$F_n = \{x \mid \operatorname*{Sup}_\alpha \|\varphi_\alpha(x)\| \leq n\}$$

Exercice 8. Soit $(E, |\cdot|)$ un espace de Banach. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces fermés de E. On suppose que la somme $F_1 + F_2 = \{x + y \mid x \in F_1, y \in F_2\}$ est fermée.

1. Vérifier que, si on pose $N((x_1, x_2)) = |x_1| + |x_2|$, alors $(F_1 \times F_2, N)$ est complet.
2. Que peut-on dire de l'application $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ sur $F_1 \times F_2$?
3. En déduire qu'il existe une constante C telle que pour tout z de $F_1 + F_2$, il existe x_1 dans F_1 et x_2 dans F_2 avec : $z = x_1 + x_2$ et $|x_1| \leq C|z|$, $|x_2| \leq C|z|$.

Exercice 9. On note E l'espace des fonctions continues de $I = [0;1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} \|f(x)\|$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. On suppose que G est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, et contenu dans $F = C^1(I, \mathbb{R})$. Le but est de montrer qu'alors G est de dimension finie.

1. Montrer que F n'est pas fermé dans E.
2. Pour $f \in F$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont-elles équivalentes sur F ?
3. Montrer que G est fermé dans $(F, \|\cdot\|)$.
4. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes sur G à l'aide du théorème d'isomorphisme de Banach.
5. En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que la boule unité fermée de G pour $\|\cdot\|_\infty$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
6. Conclure à l'aide du théorème de Riesz.

Exercice 10. (Espace quotient)
Soit E un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel fermé de E. On note E/M l'espace quotient pour la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $x - y$ appartient à F. On note $\pi : E \longrightarrow E/M$ la surjection canonique et pour $x \in E$, on pose

$$\|\pi(x)\|_{E/M} := \inf_{m\in M} \|x + m\|.$$

1. a. Vérifier que $\|\cdot\|_{E/M}$ est une norme sur E/M et que π est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1.
   b. Vérifier que $\pi(B_E(0,1)) = B_{E/M}(0,1)$, où $B_X(0,1)$ désigne la boule ouverte d'un espace vectoriel normé X.
   c. On introduit
   $$M^\perp = \{x^* \in E^* : \forall m \in M,\ x^*(m) = 0\}.$$
   Montrer que $M^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E^*.
2. On suppose maintenant que E est un espace de Banach.
   a. Montrer que E/M est un espace de Banach. *Indication :* on pourra montrer que toute série normalement convergente est convergente.
   b. Montrer qu'il existe un isomorphisme isométrique de M^* sur $E^*/M^\perp$.
   c. Montrer qu'il existe un isomorphisme isométrique de $(E/M)^*$ sur $M^\perp$.

Exercice 11. (Supplémentaire topologique)
Soit E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On dit que F admet un *supplémentaire topologique* s'il existe un sous-espace vectoriel **fermé** G tel que $E = F \oplus G$ (c'est-à-dire $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$).

1. Montrer que F admet un supplémentaire topologique si et seulement s'il existe une projection continue p (c'est-à-dire $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$) telle que $\mathrm{Im} p = F$.
2. Soient G un supplémentaire de F (non nécessairement topologique). Rappeler pourquoi il est suffisant de définir une forme linéaire λ sur E en définissant seulement ses restrictions $\lambda|_F$ à F et $\lambda|_G$ à G. Pour définir λ dans E^*, est-il encore suffisant de définir λ sur F et sur G avec $\lambda|_F \in F^*$ et $\lambda|_G \in G^*$?
3. Montrer que si F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $\dim(E/F) < \infty$, alors F admet un supplémentaire topologique.
4. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors F admet un supplémentaire topologique.

Exercice 12. (Limite de Banach) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ on pose

$$f_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} x_k$$
$$p(x) = \limsup_{N\to+\infty} f_N(x).$$

Soit $S : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ l'opérateur de translation, i.e. pour $x = (x_k)_k \in \mathbb{N}$, $S(x) = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.
Soit $c = \{x = (x_k)_k \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \ / \ (x_k)_k \text{ converge}\}$ et λ la forme linéaire définie pour $x = (x_k)_k \in c$ par $\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

1. Montrer $p(x)$ est fini pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ et que p est une sous-norme.
2. Montrer λ s'étend en une forme linéaire sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\Lambda(x) \leqslant p(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on a $\liminf_{N\to+\infty} f_N(x) \leqslant \Lambda(x) \leqslant \limsup_{N\to+\infty} f_N(x)$.
4. En déduire que si $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ est telle que $x_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\Lambda(x) \geqslant 0$.
5. En déduire que Λ est continue.
6. En déduire que $\Lambda \circ S = \Lambda$.
7. Calculer $L(a)$ pour la suite $a = (0, 1, 0, 1, \cdots)$. Calculer $L(b)$ si b est une suite périodique.

Exercice 13.

(a) Vérifier que si $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et si

$$\Phi_g(f) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt, \qquad f \in L^\infty(\mathbb{R}^+),$$

alors $\Phi_g \in (L^\infty(\mathbb{R}^+))^*$ et $\|\Phi_g\| = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$.
Ainsi,

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & L^1(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{R}^+) \\ & g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

est linéaire et isométrique. Nous voudrions montrer dans la suite que Φ n'est pas surjective.

(b) Soit V le sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mathbb{R}^+)$ défini par

$$V = \{f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue et telle que } f \text{ admet une limite en } +\infty\}.$$

(i) Montrer qu'il existe $\widetilde{\Phi} \in (L^\infty(\mathbb{R}^+))^*$ telle que

$$\widetilde{\Phi}(f) = \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad f \in V.$$

(ii) Supposons qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que $\widetilde{\Phi} = \Phi_g$. Montrer que pour toute fonction f continue à support compact, on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt = 0.$$

(iii) En déduire que $g = 0$ presque partout, puis conclure.

Exercice 14. Soit C une partie convexe et fermée d'un espace vectoriel normé E. Si ϕ est une forme linéaire continue sur E, on pose $H_\phi^a = \{x \in E, \phi(x) \geqslant a\}$. Montrer que

$$C = \bigcap_{\phi, a / C \subset H_\phi^a} H_\phi^a.$$

Exercice 15. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices orthogonales (rappelons qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M{}^tM = {}^tMM = I_n$). On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $|||\cdot|||_2$, autrement dit

$$|||M|||_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2},$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ issue du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Le but de l'exercice est de montrer que l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$–la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $|||\cdot|||_2$.
On rappelle encore le théorème de décomposition polaire suivant :
L'application $\Psi : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ définie par $\psi(O, S) = OS$ est surjective ($S_n^+(\mathbb{R})$ désigne les matrices réelles symétriques).

1. Pourquoi l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-elle contenue dans $\mathcal{B}_{M_n(\mathbb{R})}$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$. Vérifier que φ_A est linéaire et montrer que $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$ définie par $f(A) = \varphi_A$ est un isomorphisme.
3. Vérifier que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toute base orthonormale $e_1, \ldots, e_n$, on a
$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{j=1}^{n} \langle Me_i, e_i \rangle.$$
4. En déduire que pour tout matrice symétrique S et toute matrice M, on a $\mathrm{Tr}(SM) \leqslant |||M|||_2 \mathrm{Tr}(S)$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||M|||_2 \leqslant 1$.
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
   $$\mathrm{Tr}(AM) \leqslant \sup_{O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(AO).$$
   (b) En déduire que M est dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et conclure.