Analyse

—

FICHE 1 : ESPACES DE FONCTIONS

Exercice 1. (Théorème de Weierstrass comme conséquence de sa version trigonométrique) Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varepsilon > 0$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $g(\theta)$ par $g(\theta) = f(\cos(\theta))$.

1. Montrer qu'il existe une fonction polynômiale trigonométrique P telle que $\|g - P\|_\infty < \varepsilon$.
2. Étudier la parité de g. En déduire qu'il existe $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| g(\theta) - \sum_{k=0}^{n} c_k \cos(k\theta) \right| < \varepsilon.$$
3. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(k\theta)$ est une expression polynômiale en $\cos\theta$.
4. Montrer à l'aide des questions précédentes que l'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C([0, 1], \mathbb{R})$.
5. En considérant $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = (1 - t)a + tb$, montrer que l'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C([a, b], \mathbb{R})$, quel que soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Exercice 2.

1. Soit $\varphi : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone.
Montrer que $\mathcal{A}_\varphi = \{P \circ \varphi \mid P \text{ polynômiale}\}$ est dense dans $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$. En déduire que l'ensemble
$$\{f : [0; 1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin^k(x),\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$$
est dense dans $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Soit $\mathcal{P}$ la sous-algèbre engendrée par les deux éléments f_0 et f_2, où $f_0(x) = 1$ et $f_2(x) = x^2$. Montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b f(t)t^n \, \mathrm{d}t = 0$$
Montrer que $f = 0$.

Exercice 4. Soit (K, d) un espace métrique compact, et $\{f_1, \ldots, f_d\}$ une famille de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ qui sépare les points de K.

1. Montrer qu'une application continue bijective de K dans un espace métrique est un homéomorphisme.
2. Montrer que $\phi = (f_1, \ldots, f_d)$ est continue et injective sur K. En déduire que K est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 5. Soit (K, d) un espace métrique compact, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de K dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme.

2. Pour $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ et $\lambda > 0$, on pose

$$f_\lambda(x) = \inf_{y \in K} \{f(y) + \lambda d(x, y)\}$$

Montrer que f_λ est lipschitzienne.

3. Montrer que $\|f - f_\lambda\|_\infty \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$ et retrouver le résultat de la première question.

Exercice 6. On note $\mathbb{Q} \cap [0; 1] = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ et on pose $f_0(x) = 1$ et $f_n(x) = |x - a_n|$.

1. Montrer que la sous-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les f_n ($n \in \mathbb{N}$) est séparante. En déduire que $\mathcal{A}$ dense dans $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.
2. Montrer que tout élément de $\mathcal{A}$ est limite uniforme de combinaisons linéaires à coefficients rationnels de fonctions du type $f_{i_1} \times \cdots \times f_{i_s}$.
3. En déduire que $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ est séparable.

Exercice 7. Montrer que les deux premières familles suivantes sont équicontinues, mais pas la troisième :

1. à $k > 0$ fixé, l'ensemble des fonctions différentiables de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in]a; b[, |f'(t)| \leq k$;
2. l'ensemble des $f_n : t \mapsto \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[0; +\infty[$ (vers quoi cette suite de fonctions converge-t-elle simplement ?) ;
3. l'ensemble des $f_n : t \mapsto t^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[0; 1]$.

Exercice 8. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, muni de la norme uniforme. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in E,\ \|f'\|_\infty \leq m\|f\|_\infty$.

1. Montrer que la boule unité fermée de E est compacte. D'après le théorème de Riesz, cela implique que E est de dimension finie d.
2. Trouver $s \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_s \in [0; 1]$ en fonction de m tels que $f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_s))$ soit injective sur E. En déduire qu'on peut contrôler d à l'aide de m.

Exercice 9. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. On munit les trois espaces $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}(K, K)$ et

$$G(K) = \{f \in \mathcal{C}(K, K) \mid \forall x, y,\ \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|\}$$

de la norme uniforme. Montrer que $G(K)$ est fermé dans $\mathcal{C}(K, K)$, que $\mathcal{C}(K, K)$ est fermé dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$ et que $G(K)$ est compact.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique compact et $(Y, \|\cdot\|)$ un espace métrique. Montrer le sens "facile" du théorème d'Ascoli, à savoir qu'une partie compacte de $(\mathcal{C}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ est nécessairement fermée, bornée et équicontinue.

Exercice 11. Montrer que les applications suivantes sont bien définies et linéaires continues de E dans E, et calculer leur norme :

1. $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$; pour $f \in E$ on pose

$$\forall x \in [0; 1],\ \varphi(f)(x) = \int_0^1 f(t)\sin(x - t)\,\mathrm{d}t$$

2. $E = \ell_1(\mathbb{N})$ ensemble des suites sommables, muni de $\|\cdot\|_1$ (par définition, si $x = (x_n)_n \in E$, $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$) ; on fixe $\lambda = (\lambda_n)_n$ une suite réelle bornée et on pose

$$\varphi(x) = (\lambda_n x_n)_n$$

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel normé. On dit que H est un hyperplan de E s'il existe $x \in E$ tel que $E = H \oplus \langle x \rangle$. Soit φ une forme linéaire sur E.

1. Monter que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si H est un hyperplan de E alors soit H est fermé dans E, soit H est dense dans E.
3. Montrer que $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.
4. En déduire que soit φ est continue, soit $\ker \varphi$ est dense dans E.

Exercice 13. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est *à croissance lente* si

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N} \ / \ \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+|x|^k} |f^{(l)}(x)| \right) < +\infty$$

1. Vérifier que toute fonction polynomiale est à croissance lente.
2. Montrer que si f est à croissance lente et $g \in \mathcal{S}(R)$, alors $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3. En déduire que si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $x \mapsto \frac{g(x)}{a-ix}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 14. Soit $\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire.

1. Montrer que φ est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0 ; traduire ce critère de façon séquentielle.
2. Montrer que φ est continue sur E si et seulement si

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists C_p > 0 \mid \forall f \in \mathcal{S}(R),\ |\varphi(f)| \leq C_p N_p(f)$$

3. En déduire que si $g \in L^1(\mathbb{R})$ est fixée, alors $\varphi : f \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 15. Donner des exemples montrant que :

1. il n'y a aucune inclusion entre $L^\infty(]0;+\infty[)$ et $L^1(]0;+\infty[)$;
2. il n'y a aucune inclusion entre $L^1(]0;+\infty[)$ et $L^2(]0;+\infty[)$;
3. $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'implique pas $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$;
4. une suite $(f_n)_n$ convergeant vers 0 dans $L^1([0;1])$ ne converge pas forcément vers 0 dans $L^\infty([0;1])$;
5. une suite $(f_n)_n$ peut vérifier $\forall n,\ \|f_n\|_1 = 1$ et converger presque partout vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Exercice 16. Soit $1 \leq p < +\infty$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & L^p(\mathbb{R}) & \to & L^p(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f(\cdot - a) \end{array}$$

l'opérateur de translation.

1. Montrer que, si f est continue à support compact, alors

$$\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0$$

2. Montrer que ce résultat est encore vrai si on suppose juste $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 17. Soit Ω une partie mesurable non vide de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leqslant p, q, r \leqslant +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

1. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $g \in L^q(\Omega)$, fg appartient à $L^r(\Omega)$ et $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$ (inégalité de Hölder généralisée).
2. On suppose maintenant que $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$ et que Ω est bornée. Montrer que pour tout $f \in L^q(\Omega)$, f appartient à $L^p(\Omega)$ et $\|f\|_p \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$ (on pourra appliquer l'inégalité de Hölder avec un $r > 0$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$).

Exercice 18. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^p(\Omega)$.

1. Pour $n \geqslant 1$ on définie la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$T_n(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leqslant n, \\ n\frac{t}{|t|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que $(T_n \circ f)_n$ converge vers f dans L^p.

2. Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts bornés tels que $\Omega = \cup_n \Omega_n$ et $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ et χ_n la fonction indicatrice de Ω_n. Montrer que $(\chi_n f)_n$ converge dans $L^p(\Omega)$ vers f.

3. En déduire que f est limite dans $L^p(\Omega)$ d'une suite de fonctions bornées à supports compacts dans Ω.