Université de Lille **L3 Mathématiques**
2019-2020 **M-62**

Equations différentielles linéaires

Exercice 1

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $t^2y'' - 2ty' + 2y = 0$ en commençant par chercher les solutions de la forme $t \mapsto t^\alpha$.

b) Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation $4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ en commençant par chercher les solutions développables en série entière.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $2ty' + y = 3t\cos(t^{3/2})$ $(t \geq 0)$.

a) Trouver une solution développable en série entière.

b) Déterminer toutes les solutions.

c) Montrer qu'il existe une unique solution prolongeable par continuité en 0.

Exercice 3

a) Soit n un entier relatif $(n \neq 0, 1)$, et a et b des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation de Bernoulli

$$y' + a(t)y + b(t)y^n = 0$$

A l'aide du changement de fonction $z = 1/y^{n-1}$ convenablement justifié, ramener l'équation de Bernoulli à une équation linéaire.

b) Résoudre $ty' + y - ty^3 = 0$.

Exercice 4 *rattrapage 2019*

Soit l'équation différentielle

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 1$$

a) Trouver une solution évidente. En déduire la forme générale des solutions.

b) Quelles sont les solutions qui ont une limite finie en $-\infty$? en $+\infty$?

Exercice 5

a) Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle $y'' + y = \operatorname{cotan} t$.

b) Résoudre $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$.

Exercice 6
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $b, c : I \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

On pose $u(t) = y(t)e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s}$.

a) Exprimer y, y', y'' en fonction de u et de ses dérivées.

b) Montrer qu'il existe une fonction $p : I \to \mathbb{R}$ continue telle que u soit solution de

$$\begin{cases} u'' + p(t)u = 0 \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Exercice 7 *rattrapage 2018*
On considère l'équation différentielle

$$t^2y'' - ty' + y = 0 \qquad (E_1)$$

a) On se place d'abord sur l'un des deux intervalles $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, noté I. Justifier que pour toute condition initiale prise en $t_0 \in I$, il existe une unique solution maximale, et préciser sur quel intervalle celle-ci est définie. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions sur I ?

b) Vérifier que la fonction $\psi : t \mapsto t$ est solution de (E_1).

c) Soit φ telle que (φ, ψ) constitue un système fondamental de solutions de (E_1) sur I.

   (a) On note W le wronskien associé : rappeler la définition de $W(t)$, et l'équation différentielle satisfaite par W. Déterminer $W(t)$.

   (b) En déduire un choix possible pour φ de sorte que (φ, ψ) soit bien un système fondamental de solutions de (E_1) sur I.

d) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8
Soit $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{R}^+$-intégrable (c'est-à-dire d'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ absolument convergente). On considère l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y = 0$$

a) Donner l'équation différentielle vérifiée par le Wronskien d'un système fondamental de solutions. Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que si une solution est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors sa dérivée tend vers 0 en $+\infty$ (*on pourra commencer par exprimer* $y'(t_1) - y'(t_2)$ *sous forme intégrale*).

c) Montrer, en raisonnant par l'absurde et en introduisant le Wronskien, qu'il existe une solution non bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 9 *examen 2019*
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont deux fonctions continues sur $I =]0; +\infty[$ à valeurs réelles, et on pose

$$f(t) = \frac{e^t}{t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{e^{-t}}{t}\,.$$

a) Vérifier que les fonctions f et g sont linéairement indépendantes sur I.

b) Réécrire (E) sous la forme d'un système $(S) : Y' = A(t)Y$ en explicitant $A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) On suppose ici que f et g sont solutions de (E).

   i) Donner un système fondamental de solutions de (S). On note W le Wronskien associé.

   ii) Calculer $W(t)$ à partir de sa définition.

   iii) Rappeler l'équation différentielle satisfaite par W. En déduire l'expression de $a(t)$.

   iv) A quelle condition sur $b(t)$ la fonction f est-elle solution de (E) ? Vérifier que si cette condition est satisfaite, alors la fonction g est alors également solution de (E).

d) En déduire la solution générale de l'équation différentielle $y'' + \frac{2}{t}y' - y = 0$ sur I.

e) Déterminer les solutions sur I de l'équation avec second membre

$$y'' + \frac{2}{t}y' - y = \frac{e^t}{t}$$

Exercice 10

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 11

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que la fonction F est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' sous forme intégrale.

b) Trouver une équation différentielle vérifiée par F et en déduire l'expression explicite de $F(x)$.

Exercice 12

On cherche à déterminer les morphismes (de groupes) continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ continues vérifiant

$$\forall x, t \in \mathbb{R},\ f(x+t) = f(x)f(t)$$

a) Montrer que, si f convient, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \int_x^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que $f(0) = 1$, puis qu'il existe y_0 tel que $\int_0^{y_0} f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Montrer que f est solution de $y' = ay$, où $a = f'(0)$.

d) Conclure.