Université de Lille **L3 Mathématiques**
2019-2020 **M-62**

Théorie de Cauchy

Exercice 1

a) Montrer que la fonction Arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ mais pas lipschitzienne.

c) La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?

d) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'est pas localement lipschizienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $y' = f(y)$, où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$$

a) Montrer que, pour toute condition initiale $y(t_0) = y_0$, le problème de Cauchy associé admet une unique solution maximale.

b) Montrer que les solutions maximales sont globales.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $y' = \dfrac{y^2}{1+y^2}$.

a) Montrer que, pour toute condition initiale $y(t_0) = y_0$, le problème de Cauchy associé admet une unique solution maximale (φ, J).

b) Quelles sont les solutions constantes (appelées solutions *stationnaires*) ?

c) En déduire que φ reste de signe constant sur J.

d) Montrer que $J = \mathbb{R}$.

e) Montrer que φ est croissante, puis qu'elle admet des limites λ (resp. μ) en $-\infty$ (resp. $+\infty$), avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

f) On suppose $y_0 > 0$.

   i) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ puis que $\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = 0$. En déduire λ.

   ii) Montrer que, si $\mu \in \mathbb{R}$, alors $\frac{\mu^2}{1+\mu^2} = 0$. En déduire μ.

g) On suppose $y_0 < 0$: déterminer de même λ et μ.

h) Tracer l'allure des graphes des solutions.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $y' = \text{Arctan}\left(\dfrac{ty}{1+t^2y^2}\right)$.

a) Justifier que, pour toute condition initiale, le problème de Cauchy associé admet une unique solution maximale. Montrer que ces solutions sont globales.

b) Montrer que si $(\varphi, \mathbb{R})$ est solution, alors la fonction φ est paire.

Exercice 5 *examen 2019*
Soit $\alpha > 0$ fixé. On considère l'équation différentielle

$$y' = \alpha y(1-y)$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

a) Montrer que ce problème admet une unique solution maximale $(\varphi,]T_*; T^*[)$.

b) Quelles sont les solutions stationnaires ?

c) On suppose $y_0 \in]0; 1[$: montrer que la fonction φ est bornée et en déduire que $T_* = -\infty$ et $T^* = +\infty$. Faire le tableau de variations (sens de variation et calcul des limites éventuelles) de φ sur $\mathbb{R}$.

d) Si $y_0 > 1$, montrer que $T^* = +\infty$ et déterminer le comportement de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$.

e) Si $y_0 < 0$, montrer que $T_* = -\infty$ et déterminer le comportement de $\varphi(t)$ quand $t \to -\infty$.

f) Tracer le portrait de phase de l'équation, en représentant le champ des vitesses et l'allure de quelques solutions pour des conditions initiales variées.

Exercice 6
On considère l'équation différentielle $y' = (1 + \cos t)y - y^2$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

a) Montrer que ce problème admet une unique solution maximale $(\varphi,]T_*; T^*[)$, et que φ est ou bien identiquement nulle, ou bien jamais nulle.

b) On suppose $y_0 \geq 0$. Soit $f(t) = e^{-ct}\varphi(t)$: choisir $c \in \mathbb{R}$ pour que f soit décroissante. Montrer que pour une telle valeur de c, on a

$$\forall t \in [0; T^*[,\ 0 \leq \varphi(t) \leq y_0 e^{ct}$$

c) En déduire que $T^* = +\infty$.

Exercice 7
On considère l'équation différentielle $y' = \dfrac{t^3(1-y^2)y}{1+t^2}$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution maximale (φ, J). Quelles sont les solutions stationnaires ?

b) Montrer que φ est paire, et qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$ tel que $J =]-a; a[$.

c) On suppose $y_0 > 1$: faire le tableau de variation de φ et en déduire que $J = \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 1$.

d) Même question si $0 < y_0 < 1$.

e) Tracer l'allure des solutions associées aux conditions initiales $y_0 \geq 0$.

Exercice 8
Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' = -y - y^3 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ admet une unique solution maximale, et que celle-ci est globale *(indication : multiplier l'équation par y').*

Exercice 9

a) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ en posant $z = x + iy$, et tracer le portrait de phase.

b) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(u) = \left| \begin{array}{l} e^{-1/u} \text{ si } u > 0 \\ 0 \text{ si } u \leq 0 \end{array} \right.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que le système différentiel

$$\begin{cases} x' = y - x \cdot f(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y \cdot f(x^2 + y^2) \end{cases}$$

admet une unique solution maximale $(\varphi,]T_*; T^*[)$ quelle que soit la condition initiale. Montrer que $T^* = +\infty$ (on pourra étudier la fonction $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$) et que $\varphi \xrightarrow[\to +\infty]{} 0$.

Exercice 10

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x^2 - y - 1 \\ y' = x(y + 1) \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution maximale (φ, J).

b) On suppose $x_0^2 + y_0^2 < 1$: montrer que la fonction f définie sur J en posant $f(t) := \varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2 - 1$ est solution d'une équation différentielle. En déduire que $J = \mathbb{R}$.

c) On suppose $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Montrer que φ est à valeurs dans le cercle unité. Décrit-elle tout le cercle ?

Exercice 11

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -2x + x^2 y + 2 \\ y' = x - x^2 y \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$.

a) Justifier qu'il existe une unique solution maximale $(\varphi,]T_*; T^*[)$. Déterminer les solutions stationnaires.

b) Représenter le champ de vecteurs associé sur les demi-axes $[Ox)$ et $[Oy)$. En déduire que la trajectoire dans le plan de phase reste dans le quart de plan $x \geq 0,\ y \geq 0$ pour tout $t \in [0; T^*[$.

c) En remarquant que $(\varphi_1 + \varphi_2)' \leq 2$ pour $t \in [0; T^*[$, montrer que $T^* = +\infty$.