Université de Lille **L3 Mathématiques**
2019-2020 **M-62**

Introduction aux équations différentielles

Equations différentielles d'ordre 1

Exercice 1

a) Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et A une primitive de a sur I. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$.

b) Soit $b : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

sous la forme $t \mapsto e^{-A(t)}B(t)$, où B est à déterminer.

c) Si ϕ et ψ sont deux solutions de (E), que peut-on dire de $\phi - \psi$? En déduire toutes les solutions de (E).

d) Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y' + e^{t^2}y = 0$ sont définies sur $\mathbb{R}$, et tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + 2y = x^2$

b) $y' + y = 2\sin x$

c) $y' - y = (x+1)e^x$

d) $y' + y = x - e^x + \cos x$

e) $y' - y = x^k e^x \ (k \in \mathbb{N})$

f) $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$

g) $x(1 + \ln^2(x))y' + 2(\ln x)y = 1$

Exercice 3

Déterminer toutes les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0;1], \ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 4

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes, préciser s'il existe des solutions globales, et tracer les courbes intégrales :

a) $y' = (x+y)^2$ (on pourra poser $z(x) = x + y(x)$)

b) $y' = |y|$

c) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}y^2$

Exercice 5

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $\forall t \in I,\ f'(t) \leq \alpha f(t)$. On fixe $t_0 \in I$. Montrer que

$$\forall t \geq t_0,\ f(t) \leq e^{\alpha(t-t_0)} f(t_0)$$
$$\forall t \leq t_0,\ f(t) \geq e^{\alpha(t-t_0)} f(t_0)$$

b) A l'aide de l'exercice 1, justifier que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + y = -(\cos t)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

existe, et est définie sur $\mathbb{R}$. A l'aide de la question a), montrer que cette solution tend vers $+\infty$ en $-\infty$.

c) Résoudre le problème de Cauchy de la question précédente.

Exercice 6

Pour les équations différentielles suivantes, déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ et tracer leur graphe :

a) $y' + y = \max(x, 0)$

b) $x^2 y' - y = 0$

c) $xy' + y - 1 = 0$

d) $y' = -\sqrt{|y|}$

Exercice 7

Résoudre les systèmes différentiels $X'(t) = AX(t)$ pour

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}$

et tracer les portraits de phase correspondants.

Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 8

On considère l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Donner la forme générale des solutions quand

a) $d(x) = e^{-2x}$

b) $d(x) = e^{2x}$

c) $d(x) = \mathrm{ch}(2x)$

Exercice 9

On considère l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

a) L'écrire sous forme d'une équation différentielle $Y' = A \cdot Y$. Qu'appelle-t-on condition initiale ?

b) Calculer $\exp(tA)$ et vérifier que l'on retrouve bien les solutions connues.

Exercice 10
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $xy'' - (1+x)y' + y = 1$ (poser $y' - y = z$)

b) $4xy'' + 2y' - y = 0$ (poser $x = \pm t^2$)

Exercice 11

a) Déterminer une équation différentielle (E) linéaire d'ordre 2 dont les fonctions

$$\varphi_{\alpha,\beta} : x \mapsto \alpha e^{x^2} + \beta e^{-x^2} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

sont solutions sur $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$.

b) Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ (on pourra poser $t = x^2$).

c) En déduire que les fonctions $\varphi_{\alpha,\beta}$ sont exactement les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ et $x \in [0; 1]$, on pose

$$T(f)(x) = \int_0^x \left(\int_t^1 f(u) \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$$

Vérifier que T est un endomorphisme de E, et déterminer ses éléments propres.