Université de Lille **L3 Mathématiques**
2019-2020 **M-62**

Session 2

CONSIGNES :

- **votre nom et votre carte d'étudiant** doivent figurer sur la première page de la copie ;
- copie à déposer sur Moodle **avant 11h** ; penser au temps nécessaire pour scanner/photographier puis traiter numériquement le fichier ;
- la copie doit correspondre à **un unique fichier .pdf**, dont **les pages seront numérotées** (et placées dans l'ordre et dans le bon sens) nommé de la façon suivante :

rattrapageM62_NOM_prenom

Barème : 2,5 points par question

Les questions sont indépendantes.

1. Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz (version la plus générale) pour $y' = f(t, y)$. Justifier que les hypothèses du théorème sont nécessaires.
2. Déterminer une équation différentielle du type $y'' + by' + cy = 0$ (où $b, c \in \mathbb{R}$) telle que les fonctions $t \mapsto e^{-4t}$ et $t \mapsto te^{-4t}$ soient solutions.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $ty' + y = e^t$.
4. On considère un système différentiel de la forme $X' = F(t, X)$ dans $\mathbb{R}^2$. Les trajectoires des solutions dans le plan de phase peuvent-elles se couper ? (donner une justification ou un contre-exemple)
5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I. Montrer que toute solution non constante de l'équation différentielle $y' = f(y)$ est strictement monotone.
6. Soit a une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et $k > 0$. Montrer que l'équation $y' - ky = a$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.
7. Soit φ une solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle $y'' = -t|y|$, vérifiant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Montrer que $\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$.
8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f'(t) + f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$: comment se comporte $f(t)$ en $+\infty$?