Université de Lille **L3 Mathématiques**
2019-2020 **M-62**

Session 1

CONSIGNES :

- copie à déposer sur Moodle **avant le 23 mai, 13h** ; penser au temps nécessaire pour scanner/photographier puis traiter numériquement le fichier ;
- les différents exercices doivent être traités sur des **pages séparées** ;
- la copie doit correspondre à **un unique fichier .pdf**, dont **les pages seront numérotées** (et placées dans l'ordre et dans le bon sens) nommé de la façon suivante :

M62_NOM_prenom

Exercice 0

Sur la première page de la copie, faire figurer votre nom et votre carte d'étudiant.

Exercice 1

Résoudre, en précisant soigneusement les intervalles sur lesquels on travaille, l'équation différentielle suivante :

$$y' = \frac{1}{ty} \tag{1}$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$y' = t(\cos y)^{2020} \tag{2}$$

a) Déterminer les solutions constantes.

b) Justifier que, pour toute condition initiale $y(t_0) = y_0$, le problème de Cauchy associé à (2) admet une unique solution maximale (φ, J).

c) Montrer que $J = \mathbb{R}$.

d) Etudier la monotonie de φ. En déduire que φ admet des limites finies en $\pm\infty$.

e) Déterminer ces limites lorsque $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$.

f) Vérifier que la fonction $\psi : t \mapsto \varphi(t) + \pi$ est aussi solution de (2) sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\psi(t_0)$?

g) A l'aide des questions précédentes, tracer l'allure des graphes des solutions de (2).

T.S.V.P. $\longrightarrow$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X' = AX \\ \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{3}$$

a) Rappeler l'expression et l'intervalle de définition de la solution maximale du problème (3).

On note $Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$ et on s'intéresse à la propriété suivante :

(P) *pour tout $X_0 \in Q$, la solution maximale Φ de (3) vérifie $\forall t \geq 0,\ \Phi(t) \in Q$*

b) Résoudre (3) pour $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ et tracer le portrait de phase correspondant . Vérifier que la propriété (P) n'est pas satisfaite, mais qu'il existe une matrice semblable à A (qu'on déterminera) pour laquelle (P) est satisfaite.

c) Supposons que la propriété (P) est satisfaite. On note $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ la solution maximale de (3) pour $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}$ la solution maximale de (3) pour $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En étudiant $\Psi'(0)$ et $\tilde{\Psi}'(0)$, montrer que $b \geq 0$ et $c \geq 0$.

d) Réciproquement, supposons que $b \geq 0$ et $c \geq 0$. Montrer que la propriété (P) est satisfaite (on pourra introduire la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}\Phi(t)$, où Φ est la solution maximale de (3)).