Université de Lille — Master 1 Mathématiques
M402 Analyse — 2018-2019

Seconde session

Exercice 1

1. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$: montrer que f est identiquement nulle.
2. Soit $g : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.
   (a) Justifier que pour tout $n \geq 2$, la fonction $x \mapsto g(x)e^{-nx}$ est dans $L^1([0;+\infty[)$, et montrer qu'il existe $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall n \geq 2,\ \int_0^{+\infty} g(x)e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que si $\forall n \geq 2$, $\int_0^{+\infty} g(x)e^{-nx}\,\mathrm{d}x = 0$, alors g est identiquement nulle.

Exercice 2

Soit $E = L^2([0;2\pi],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$.
On note $e_n : x \mapsto e^{inx}$ et $H = \{f \in E \mid \forall n < 0,\ \langle f, e_n\rangle = 0\}$.

1. Montrer que H est un espace de Hilbert. En donner une base hilbertienne.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose
   $$\begin{array}{rccl} \phi_z : & E & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n\rangle z^n \end{array}$$
   (a) Justifier que l'application ϕ_z est bien définie, linéaire et continue.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $h_z \in E$ tel que
   $$\forall f \in E,\ \phi_z(f) = \langle f, h_z\rangle$$
   et déterminer explicitement h_z.
   (c) Montrer que $H^\perp = \displaystyle\bigcap_{|z|<1} \operatorname{Ker}\phi_z$.
3. Déterminer les projections orthogonales sur H de
   $$f : t \mapsto \frac{1}{2-e^{it}} \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \frac{1}{1-2e^{it}}$$

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et A une partie non vide de E. On suppose que pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi(A)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

1. Pour $a \in A$, on pose

$$\begin{array}{rccc} T_a : & E^* & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi(a) \end{array}$$

   Vérifier que T_a est une application linéaire continue.

2. Montrer que $\|T_a\| = \|a\|$ (*indication : on pourra utiliser un théorème de Hahn-Banach*). Que peut-on dire de $\operatorname*{Sup}_{a \in A} \|T_a\|$?

3. En déduire que A est une partie bornée de E.

Exercice 4

Dans cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, H la fonction de Heaviside (définie par $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$), et δ la distribution de Dirac en 0.

1. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_\lambda(t) = \varphi(t + \frac{\lambda}{2\pi})$: calculer

$$\widehat{\varphi_\lambda}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda(t) e^{-2i\pi xt} \mathrm{d}t$$

2. Déterminer $\widehat{\delta}$ et H'.

3. On pose $T = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

   (a) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et ψ définie par $\psi(x) = \varphi(-x)$: montrer que $\widehat{T}(\psi) = -\widehat{T}(\varphi)$.

   (b) On rappelle que $\left(\widehat{T}\right)' = -2i\pi\, \widehat{xT}$. En partant de l'égalité $xT = 1$ (au sens des distributions), montrer que $\widehat{T} = -i\pi\, \mathrm{sgn}(x)$.

4. Soit T_λ la distribution $e^{i\lambda x} \cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$. Montrer que $\widehat{T_\lambda}$ converge au sens des distributions vers $i\pi$ quand $\lambda \to +\infty$.

5. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} T_\lambda$.