Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

Session 2

Durée 3h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Le barème proposé est indicatif.

La correction tiendra compte du soin et de la rigueur de la rédaction. En particulier, les théorèmes utilisés doivent être énoncés précisément.

Exercice 1 *(3 points)*

Soit l'équation différentielle

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 1 \tag{1}$$

a) Trouver une solution évidente. En déduire la forme générale des solutions de (1).

b) Quelles sont les solutions de (1) qui ont une limite finie en $-\infty$? en $+\infty$?

Exercice 2 *(3 points)*

a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle

$$t^2 y' - y = 0 \tag{2}$$

sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

b) Pour $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, on considère

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} \alpha e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ \beta e^{-1/x} \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que f se prolonge par continuité en 0.

c) Résoudre (2) sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.
$\longrightarrow$

Exercice 3 *(10 points)*

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -2x - 3xy \\ y' = 2x^2 - y \end{cases} \tag{3}$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

a) Soit le système linéarisé à l'origine associé à (3) :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -y \end{cases}$$

Résoudre (S). Tracer son portrait de phase en faisant apparaître l'orientation des trajectoires et les trajectoires particulières.

b) On pose $f_1(x, y) = -2x - 3xy$ et $f_2(x, y) = 2x^2 - y$: déterminer les courbes ℓ_1 et ℓ_2 définies respectivement par $f_1(x, y) = 0$ et par $f_2(x, y) = 0$. Quels sont les points d'équilibre du système ?

c) Représenter graphiquement ℓ_1, ℓ_2 et l'allure du champ de vecteurs du système (3) en indiquant les six zones où x' et y' sont de signe constant, en précisant le signe de x' et y' dans chacune de ces zones.

d) Justifier que, pour toute condition initiale, le système (3) admet une unique solution maximale $(\varphi,]T_*; T^*[)$. On note en coordonnées $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ et on définit

$$E(t) = 2\varphi_1(t)^2 + 3\varphi_2(t)^2$$

e) Montrer que la fonction E est décroissante.

f) En déduire que φ est bornée sur $[0; T^*[$ puis que $T^* = +\infty$.

g) Déterminer une constante $c > 0$ telle que $E' \leq -cE$.

h) On suppose que $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

   i) Montrer que la fonction E est à valeurs strictement positives. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $E(t) \leq E(0)e^{-2t}$.

   ii) Montrer que $\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Exercice 4 *(4 points)*

On considère l'équation différentielle

$$y' = 2te^{-t^2} + \frac{y^5}{1 + y^4} \cos(te^y) \tag{4}$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

a) Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale $(\varphi,]T_*; T^*[)$.

b) En utilisant la formulation intégrale de (4), montrer que

$$\forall t \in [0; T^*[,\ |\varphi(t)| \leq 2 + \int_0^t |\varphi(s)| \, \mathrm{d}s$$

c) Enoncer le lemme de Grönwall. En déduire que $\forall t \in [0; T^*[,\ |\varphi(t)| \leq 2e^t$.

d) Montrer que $T^* = +\infty$.