Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

Devoir Surveillé 1

Durée 2h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Le barème proposé est indicatif.

La correction tiendra compte du soin et de la rigueur de la rédaction. En particulier, les théorèmes utilisés doivent être énoncés précisément.

Exercice 1 *(3 points)*

Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante (on commencera par la résoudre sur des intervalles bien choisis) :

$$ty' + (1-t)y = 1 \tag{1}$$

Exercice 2 *(2 points)*

Résoudre le système différentiel suivant avec la condition initiale $x(0) = 5$, $y(0) = 0$:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - 3y \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 3 *(6 points)*

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = e^{2y} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

1. Réécrire (3) sous la forme d'un problème de Cauchy d'ordre 1 : $\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$.
2. Montrer que le problème (3) admet une unique solution maximale, notée (φ, J).
3. Vérifier que $\forall t \in J,\ \varphi'(t)^2 = e^{2\varphi(t)}$.
4. Montrer que φ' est à valeurs strictement positives sur J.
5. Déterminer l'expression de φ sur J.
6. En déduire la solution maximale de (3). Est-elle globale ?

T.S.V.P. $\longrightarrow$

Exercice 4 *(9 points)*

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{20\sqrt{1-t^2}} \dfrac{y}{(1+y^2)^3} \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

où $t_0 \in]-1;1[$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

On rappelle le résultat suivant : *toute application contractante d'un espace complet dans lui-même admet un unique point fixe.*

Les questions 3 et 4 peuvent être traitées indépendamment de la question 1.

1. Soit $-1 < a < t_0 < b < 1$. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[a;b]$, et pour $\varphi \in E$ on pose $\|\varphi\| = \underset{t\in[a;b]}{\mathrm{Max}}|\varphi(t)|$.
   i) Pour $\varphi \in E$ et $t \in [a;b]$, on pose
   $$T(\varphi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \frac{\varphi(s)}{(1+\varphi(s)^2)^3}\,\mathrm{d}s$$
   Vérifier que T est une application bien définie sur E, à valeurs dans E.
   ii) Montrer que la fonction φ est solution de (4) sur $[a;b]$ si et seulement si $\varphi \in E$ et vérifie $\forall t \in [a;b],\ \varphi(t) = T(\varphi)(t)$.
   iii) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^3}$ est 5-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En déduire que
   $$\forall \varphi, \psi \in E,\ \forall t \in [a;b],\ |T(\varphi)(t) - T(\psi)(t)| \leq C\|\varphi - \psi\|$$
   où C est une constante (indépendante de φ, ψ et t) exprimée sous la forme d'une intégrale que l'on calculera (*on rappelle que* $\mathrm{Arccos}'(s) = \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}}$ *sur* $]-1;1[$).
   iv) Montrer qu'il existe une unique fonction $\varphi_{a,b} \in E$ telle que $T(\varphi_{a,b}) = \varphi_{a,b}$.
2. Déduire du 1. que le problème (4) admet une unique solution sur $]-1;1[$, notée φ.
3. Que vaut φ si $y_0 = 0$?
4. On suppose $y_0 > 0$.
   i) Montrer que φ ne s'annule pas sur $]-1;1[$.
   ii) En déduire que la fonction φ est strictement monotone, et qu'elle a une limite finie quand t tend vers -1.