Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

TP noté - 26 avril 2018

Le code Python réalisant les illustrations demandées est à déposer sur Moodle à la fin des 2h de TP.

Le compte-rendu sur la partie théorique est à rédiger sur papier, puis à déposer sur Moodle (scanné ou photographié) au plus tard MARDI 30 AVRIL à 23H.

On s'intéresse à l'évolution de deux populations d'insectes qu'on note $X(t)$ et $Y(t)$. En l'absence d'interactions, la première population suit le modèle :

$$X' = aX \text{ avec } a > 0, \tag{1}$$

tandis que la deuxième population suit le modèle :

$$Y' = cY - dY^2 \text{ avec } c > 0, d > 0. \tag{2}$$

Quand les deux populations d'insectes cohabitent, elles entrent en compétition et le taux de mortalité de chacune est influencé par la présence de l'autre. La situation est alors décrite par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} X' = aX - bXY, \\ Y' = cY - dY^2 - eXY. \end{cases} \tag{3}$$

On suppose que toutes les constantes du système, a, b, c, d, e, sont strictement positives et que $a/b > c/d$. Pour les essais numériques, on prendra les valeurs :

$$a = 0.5,\ b = 0.02,\ c = 0.2,\ d = 0.01,\ e = 0.01.$$

Partie I : Étude des modèles à une espèce.

1. Réaliser le portrait de phase de (1) dans le plan (t, X) (champ des vitesses + quelques trajectoires significatives). On se limitera à la fenêtre graphique $[-5, 5] \times [0, 40]$.
2. Réaliser le portrait de phase de (2) dans le plan (t, Y) (champ des vitesses + quelques trajectoires significatives). On se limitera à la fenêtre graphique $[-5, 5] \times [0, 40]$.
3. Commenter les deux portraits de phase obtenus, en mettant en évidence les différences entre les deux modèles.

Partie II : Étude du modèle couplé (3).

On considère des conditions initiales $(X(0), Y(0)) = (x_0, y_0)$.

4. Montrer que, quel que soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale $(\Phi = (X, Y),]T_*, T^*[)$.
5. Montrer que si $(x_0, y_0) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ alors $(X(t), Y(t)) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ pour tout $t \in]T_*, T^*[$.

À partir de maintenant, on limite l'étude au quadrant $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$.

6. Déterminer les courbes ℓ_1 et ℓ_2 définies respectivement par $X'(t) = 0$ et $Y'(t) = 0$.
7. Déterminer les points d'équilibre du système.
8. Représenter sur un même graphique ℓ_1, ℓ_2, les points d'équilibre et le champ des vitesses. On se limitera à la fenêtre graphique $[0, 40] \times [0, 40]$.
9. Identifier les zones pour lesquelles X' et Y' sont de signes constants.

On suppose désormais que $(x_0, y_0) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

10. Montrer que $0 < Y(t) \leq \max(y_0, c/d)$ pour tout $t \in [0, T^*[$.
11. Montrer que $X'(t) \leq aX(t)$ pour tout $t \in]T_*, T^*[$, puis que $0 < X(t) \leq x_0 \exp(at)$ pour tout $t \in [0, T^*[$.
12. En déduire que $T^* = +\infty$.
13. Terminer le portrait de phase débuté en 5 en ajoutant des trajectoires significatives.
14. Que valent
$$\lim_{t \to +\infty} X(t) \text{ et } \lim_{t \to +\infty} Y(t)?$$