Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

Examen - 14 mai 2019

Durée 3h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La correction tiendra compte du soin et de la rigueur de la rédaction. En particulier, les théorèmes utilisés doivent être énoncés précisément.

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy

$$y' - \frac{y}{t} - y^2 = -9t^2 \tag{1}$$

sur l'intervalle $]0;+\infty[$, avec la condition initiale $y(1) = 4$.

a) Justifier que ce problème admet une unique solution maximale, notée (φ, J).

b) Déterminer $a > 0$ pour que la fonction $t \mapsto at$ soit solution de (1).

c) Montrer que la fonction $t \mapsto at - \varphi(t)$ ne s'annule pas sur J.

d) On définit

$$\psi(t) = \frac{1}{at - \varphi(t)}\,.$$

i) Exprimer φ en fonction de ψ et en déduire que ψ est solution sur J de l'équation différentielle (E_1) : $y' + \left(6t + \frac{1}{t}\right) y = 1$.

ii) Donner la forme générale des solutions de (E_1) sur $]0;+\infty[$.

iii) Calculer $\psi(t)$.

e) Déterminer φ et J.

T.S.V.P.
$\longrightarrow$

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$ fixé. On considère l'équation différentielle

$$y' = \alpha y(1-y) \tag{2}$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

a) Montrer que ce problème admet une unique solution maximale $(\varphi,]T_*; T^*[)$.

b) Quelles sont les solutions stationnaires de l'équation (2) ?

c) On suppose $y_0 \in]0;1[$: montrer que la fonction φ est bornée et en déduire que $T_* = -\infty$ et $T^* = +\infty$. Faire le tableau de variations (sens de variation et calcul des limites éventuelles) de φ sur $\mathbb{R}$.

d) Si $y_0 > 1$, montrer que $T^* = +\infty$ et déterminer le comportement de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$.

e) Si $y_0 < 0$, montrer que $T_* = -\infty$ et déterminer le comportement de $\varphi(t)$ quand $t \to -\infty$.

f) Tracer le portrait de phase de l'équation (2), en représentant le champ des vitesses et l'allure de quelques solutions pour des conditions initiales variées.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont deux fonctions continues sur $I =]0; +\infty[$ à valeurs réelles, et on pose

$$f(t) = \frac{e^t}{t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{e^{-t}}{t}\,.$$

a) Vérifier que les fonctions f et g sont linéairement indépendantes sur I.

b) Réécrire (E) sous la forme d'un système (S) : $Y' = A(t)Y$ en explicitant $A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) On suppose ici que f et g sont solutions de (E).

   i) Donner un système fondamental de solutions de (S). On note W le Wronskien associé.

   ii) Calculer $W(t)$ à partir de sa définition.

   iii) Rappeler l'équation différentielle satisfaite par W. En déduire l'expression de $a(t)$.

   iv) A quelle condition sur $b(t)$ la fonction f est-elle solution de (E) ? Vérifier que si cette condition est satisfaite, alors la fonction g est alors également solution de (E).

d) En déduire la solution générale de l'équation différentielle $y'' + \frac{2}{t}y' - y = 0$ sur I.

e) Déterminer les solutions sur I de l'équation avec second membre

$$y'' + \frac{2}{t}y' - y = \frac{e^t}{t} \tag{3}$$

Exercice 4

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + xy \end{cases} \tag{4}$$

avec comme condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

a) Justifier que ce système admet une unique solution maximale $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, définie sur un intervalle J.

b) Déterminer les solutions stationnaires du système (4).

c) Montrer qu'il existe des solutions de la forme $(\varphi_1(t), 0)$ et $(0, \varphi_2(t))$.

d) On suppose désormais que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

   i) Montrer que pour tout $t \in J$, $\varphi_1(t) > 0$ et $\varphi_2(t) > 0$.

   ii) On pose $h(x) = x - \ln x$ pour $x > 0$. Montrer que $h(\varphi_1(t)) + h(\varphi_2(t)) = C$ pour tout $t \in J$, où $C = h(x_0) + h(y_0)$.

   iii) Etudier la fonction h. Vérifier qu'elle est à valeurs positives et qu'il existe $M > 0$ tel que

$$h(x) \leq C \implies 0 < x \leq M\,.$$

   iv) En déduire que pour tout $t \in J$, $0 < \varphi_1(t) \leq M$ et $0 < \varphi_2(t) \leq M$.

   v) Montrer que la solution maximale est globale.