Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

Corrigé du DS1

Exercice 1

On commence par se ramener aux intervalles sur lesquels le coefficient de y' ne s'annule pas : sur $I^+ =]0; +\infty[$ ou $I^- =]-\infty; 0[$, (1) est équivalente à

$$y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right) y = \frac{1}{t}$$

qui est une équation différentielle linéaire, d'ordre 1, avec second membre.

Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène associée est $y' + (\frac{1}{t} - 1)y = 0$. Ses solutions sont les fonctions de la forme $y_H(t) = \lambda e^{A(t)}$ où $A'(t) = -(\frac{1}{t} - 1)$: par exemple, $A(t) = -\ln|t| + t$, autrement dit $y_H(t) = \lambda \frac{e^t}{|t|}$. Quitte à changer λ en $-\lambda$ sur I^-, on obtient donc

$$y_H(t) = \lambda \frac{e^t}{t}$$

Résolution de (1) sur I^+ ou I^-

On cherche une solution particulière y_P en utilisant la méthode de variation de la constante, sous la forme $y_P(t) = \lambda(t)\frac{e^t}{t}$. Une telle fonction est solution de (1) sur $I = I^+$ ou I^- si et seulement si

$$\lambda'(t)\frac{e^t}{t} = \frac{1}{t}$$

et on peut donc choisir $\lambda(t) = -e^{-t}$, et par conséquent $y_P(t) = -e^{-t} \cdot \frac{e^t}{t} = \frac{-1}{t}$. Les solutions de (1) sur I^+ ou I^- sont la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

$$\boxed{\text{Les solutions de (1) sur } I^+ \text{ ou } I^- \text{ sont les fonctions } t \mapsto \frac{ce^t - 1}{t} \ (c \in \mathbb{R}).}$$

Solutions de (1) sur $\mathbb{R}$

Une solution φ de (1) sur $\mathbb{R}$ est nécessairement solution sur I^+ et I^- : par conséquent, elle s'écrit

$$\varphi(t) = \left| \begin{array}{l} \frac{c^+e^t - 1}{t} \text{ si } t > 0 \\ \frac{c^-e^t - 1}{t} \text{ si } t < 0 \end{array} \right.$$

Il reste à déterminer c^+ et c^- pour obtenir une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de (1) sur $\mathbb{R}$. Evidemment le problème éventuel est en $t = 0$:

— prolongement par continuité en 0
Si $c^+ - 1 \neq 0$, $\frac{c^+e^t-1}{t}$ n'a pas de limite finie en 0^+, il faut donc nécessairement $c^+ = 1$ et de même $c^- = 1$, autrement dit

$$\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} \text{ si } t \neq 0$$

Cette fonction se prolonge bien par continuité en 0, en posant $\varphi(0) = 1$.

— prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ en 0
Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(t) = \frac{(t-1)e^t+1}{t^2}$. Or

$$\varphi'(t) = \frac{(t-1)(1+t+t^2/2+o(t^2))+1}{t^2} = \frac{t^2/2+o(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

d'où φ se prolonge bien en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 en posant $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$.

— enfin, on vérifie que φ est solution de (1) en $t = 0$.

Par conséquent, $\boxed{\text{(1) admet une unique solution sur } \mathbb{R} \text{ entier : } t \mapsto \frac{e^t-1}{t}.}$

Exercice 2

Il s'agit de résoudre le système différentiel $X' = AX$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.
Pour cela on commence par chercher les éléments propres de la matrice A : son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$, elle a donc deux valeurs propres distinctes -1 et -2. De plus, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre -1, et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre -2. Posons donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a alors $A = P\Delta P^{-1}$, et le système à résoudre s'écrit $P^{-1}X' = \Delta P^{-1}X$.

Soit $Z(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$: $Z' = \Delta Z$, autrement dit $\begin{cases} z_1' = -z_1 \\ z_2' = -2z_2 \end{cases}$, ce qui donne $z_1(t) = c_1e^{-t}$ et $z_2(t) = c_2e^{-2t}$. Par conséquant on obtient pour $X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} \\ y(t) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} \end{cases}$$

Il reste à déterminer les constantes c_1 et c_2 de sorte que la condition initiale soit vérifiée, autrement dit $\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 \\ 0 = -c_1 - 2c_2 \end{cases}$. On obtient $c_1 = 10$ et $c_2 = -5$, ainsi

$$\boxed{\text{le problème de Cauchy admet comme solution } \begin{cases} x(t) = 10e^{-t} - 5e^{-2t} \\ y(t) = -10e^{-t} + 10e^{-2t} \end{cases} \text{ (sur } \mathbb{R}\text{).}}$$

Exercice 3

1. <u>Réécriture de (3) sous forme d'un problème de Cauchy d'ordre 1</u>

   Soit $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$: alors

$$y \text{ est solution de (3)} \iff \begin{cases} y \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \\ y'' = e^{2y} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ e^{2y} \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

   Autrement dit, en posant $F(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ e^{2y_1} \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a montré que

$$\boxed{y \text{ est solution de (3)} \iff Y \text{ est solution de } \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}}$$

2. <u>Montrons qu'il existe une unique solution maximale</u>

   Comme F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable $X \in \mathbb{R}^2$, indépendante de t (*a fortiori* continue et localement lipschitzienne par rapport au couple (t, X)), le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : pour toute condition initiale, en particulier $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'équation différentielle $Y' = F(Y)$ admet une unique solution maximale (Φ, J). Par conséquent

$$\boxed{\text{le problème (3) admet une unique solution maximale } (\varphi, J)}$$

   (et φ est la première composante de Φ).

3. <u>Relation entre φ' et φ</u>

   Les deux membres de la relation souhaitée, $(\varphi')^2$ et $e^{2\varphi}$, sont dérivables. Leurs dérivées respectives $2\varphi'\varphi''$ et $2\varphi' e^{2\varphi}$ sont égales puisque φ est solution de l'équation différentielle $y'' = e^{2y}$. Les deux fonctions sont donc égales à constante près sur l'intervalle J : il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in J,\ \varphi'(t)^2 = e^{2\varphi(t)} + c$$

   En appliquant cette relation en $t = 0$, on obtient $c = 0$ et donc

$$\boxed{(\varphi')^2 = e^{2\varphi}}$$

4. <u>Montrons que φ' est strictement positive</u>

   Vu la relation obtenue dans la question précédente, la fonction φ' ne s'annule pas. Comme elle est continue sur l'intervalle J, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle reste de signe constant sur J. Or $\varphi'(0) = 1$: par conséquent

$$\boxed{\varphi' \text{ reste strictement positive sur } J.}$$

5. Expression de φ
Puisque φ' est à valeurs positives, on a $\varphi' = \sqrt{(\varphi')^2}$ et donc

$$\forall t \in J,\ \varphi'(t) = \sqrt{e^{2\varphi(t)}} = e^{\varphi(t)}$$

autrement dit $\varphi'(t)e^{-\varphi(t)} = 1$ pour tout t. En intégrant cette égalité sur J, on obtient qu'il existe une constante $c' \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in J,\ -e^{-\varphi(t)} = t + c'$$

et la condition initiale $\varphi(0) = 0$ donne $c' = -1$. D'où

$$\boxed{\forall t \in J,\ \begin{cases} 1 - t > 0 \\ \varphi(t) = -\ln(1-t) \end{cases}}$$

6. Solution maximale de (3)
La question précédente montre que nécessairement $\varphi(t) = -\ln(1-t)$ et $J \subset]-\infty; 1[$. Réciproquement, on vérifie que cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et que $\varphi''(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = e^{2\varphi(t)}$ sur $]-\infty; 1[$. Ainsi

$$\boxed{\text{la solution maximale du problème (3) est } (t \mapsto -\ln(1-t),]-\infty; 1[).}$$

Elle n'est $\boxed{\text{pas globale}}$ puisque l'équation a un sens pour $t \in \mathbb{R}$, mais que l'intervalle de définition de la solution maximale est $]-\infty; 1[$.

Exercice 4

1. i) Montrons que T est une application de E dans E
Soit $\varphi \in E$: la fonction $s \mapsto \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \frac{\varphi(s)}{(1+\varphi(s)^2)^3}$ est continue sur le segment $[t_0; t]$ ou $[t; t_0]$, qui est inclus dans $[a; b]$: elle est donc intégrable, et $T(\varphi)(t)$ est bien définie pour $t \in [a; b]$. De plus $T(\varphi)$ est donc une primitive d'une fonction continue, cela implique qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ *a fortiori* continue sur $[a; b]$. Ainsi

$$\boxed{\text{l'application } T \text{ est bien définie sur } E, \text{ à valeurs dans } E.}$$

ii) Traduction de (4) sous forme d'une équation intégrale
— Supposons que φ est solution de (4) sur $[a; b]$: en particulier φ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue sur $[a; b]$, d'où $\varphi \in E$. En primitivant l'équation différentielle, on obtient pour tout $t \in [a; b]$,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \frac{\varphi(s)}{(1+\varphi(s)^2)^3}\,\mathrm{d}s = T(\varphi)(t)$$

— Réciproquement, si $\varphi \in E$ et $\forall t \in [a; b],\ \varphi(t) = T(\varphi)(t)$: $T(\varphi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que primitive d'une fonction continue, donc φ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. En dérivant la relation $\varphi = T(\varphi)$, on obtient

$$\varphi'(t) = \frac{1}{20\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(1+\varphi(t)^2)^3}$$

Enfin, $\varphi(t_0) = x_0 + 0$, donc φ est bien solution de (4) sur $[a; b]$.

On a donc montré que

$$\boxed{\varphi \text{ est solution de (4) sur } [a;b] \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in E \\ \varphi = T(\varphi) \end{array} \right. .}$$

iii) <u>Montrons que T est une application lipschitzienne</u>

— Commençons par montrer que $g : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^3}$ est 5-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Comme g est dérivable, (il faut et) il suffit de montrer que g' est bornée sur $\mathbb{R}$ par 5 : l'inégalité des accroissements finis donnera alors le résultat voulu. Or $g'(x) = \frac{1-5x^2}{(1+x^2)^6}$, d'où

$$|g'(x)| \leq \frac{1+5x^2}{(1+x^2)^6} \leq \frac{5+5x^2}{(1+x^2)^6} = \frac{5}{(1+x^2)^5} \leq 5$$

Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est 5-lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$

— Soit $\varphi, \psi \in E$. Pour tout $t \in [a;b]$,

$$\begin{aligned}
|T(\varphi)(t) - T(\psi)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \left(\frac{\varphi(s)}{(1+\varphi(s)^2)^3} - \frac{\psi(s)}{(1+\psi(s)^2)^3} \right) \mathrm{d}s \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \left(g(\varphi(s)) - g(\psi(s)) \right) \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} |g(\varphi(s)) - g(\psi(s))| \, \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} 5|\varphi(s) - \psi(s)| \, \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} 5 \, \|\varphi - \psi\| \, \mathrm{d}s \right| \\
&\leq 5\|\varphi - \psi\| \times \left| \int_{t_0}^{t} \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \mathrm{d}s \right|
\end{aligned}$$

Comme la fonction intégrée est positive, et que l'intervalle $[t_0;t]$ ou $[t;t_0]$ est inclus dans $[a;b]$, on a ainsi

$$\boxed{\forall \varphi, \psi \in E, \ \forall t \in [a;b], \ |T(\varphi)(t) - T(\psi)(t)| \leq \|\varphi - \psi\| \times 5 \int_a^b \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \mathrm{d}s}$$

Par conséquent, on peut choisir $\boxed{C = \int_a^b \frac{1}{4\sqrt{1-s^2}} \mathrm{d}s = \frac{1}{4}(\mathrm{Arccos}(a) - \mathrm{Arccos}(b)).}$

iv) <u>Existence d'un unique point fixe</u>

Il s'agit de montrer que l'opérateur T a un unique point fixe dans E. Or on a montré dans i) que T est une application de E dans E ; de plus vu iii), on a

$$\forall \varphi, \psi \in E, \ \|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq C\|\varphi - \psi\|$$

où $C = \frac{1}{4}(\mathrm{Arccos}(a) - \mathrm{Arccos}(b)) \leq \frac{1}{4}(\mathrm{Arccos}(-1) - \mathrm{Arccos}(1)) = \frac{\pi}{4}$ puisque la fonction Arccos est décroissante sur $[-1;1]$. Ainsi $C < 1$ et T est donc contractante. Enfin,

$(E, \|\cdot\|)$ est bien un espace complet (c'est l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs dans l'espace complet $\mathbb{R}$, pour la norme uniforme). Le théorème du point fixe s'applique donc et montre que

$$\boxed{\text{l'application } T \text{ a un unique point fixe } \varphi_{a,b} \in E.}$$

2. Montrons que le problème (4) admet une unique solution globale
D'après 1.iv), pour tout segment $[a;b]$ inclus dans $]-1;1[$ et contenant t_0, il existe une unique fonction $\varphi_{a,b} \in E$ telle que $T(\varphi_{a,b}) = \varphi_{a,b}$, autrement dit vu 1.ii), une unique solution de (4) sur $[a;b]$. Toute solution de (4) sur $]-1;1[$ doit donc nécessairement coïncider avec $\varphi_{a,b}$ sur $[a;b]$.
Définissons la fonction φ en posant $\varphi(t) = \varphi_{a,b}(t)$ pour $[a;b]$ segment inclus dans $]-1;1[$ contenant t_0 et t :
   — $\varphi(t)$ est bien défini car si $[a;b]$ et $[a';b']$ sont deux segments inclus dans $]-1;1[$ contenant t_0 et t, alors $[a;b] \cap [a';b']$ est encore un segment $[a'';b'']$ inclus dans $]-1;1[$ contenant t_0 et t. L'unicité obtenue dans 1.iv) montre qu'alors $\varphi_{a,b}$ et $\varphi_{a',b'}$ coïncident sur $[a'';b'']$ (avec $\varphi_{a'',b''}$).
   — la fonction φ ainsi construite est solution de (4) sur tout segment $[a;b]$ inclus dans $]-1;1[$ et contenant t_0, elle est donc solution de (4) sur $]-1;1[$.

   Ainsi $\boxed{\text{le problème (4) admet une unique solution sur }]-1;1[.}$

3. Cas $y_0 = 0$
On remarque que la fonction nulle est solution de l'équation différentielle sur $]-1;1[$, et s'annule en t_0. L'unicité obtenue en 2. montre que $\boxed{\text{si } y_0 = 0,\ \varphi \text{ est la fonction nulle.}}$

4. i) Montrons que φ ne s'annule pas sur $]-1;1[$
Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1 \in]-1;1[$ tel que $\varphi(t_1) = 0$: alors φ est solution sur $]-1;1[$ de l'équation différentielle, avec la condition initiale $y(t_1) = 0$. D'après 3. (en remplaçant t_0 par t_1), φ est donc la fonction nulle, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\varphi(t_0) = y_0 > 0$. Par conséquent $\boxed{\varphi \text{ ne s'annule pas sur }]-1;1[.}$

   ii) Etude de la fonction φ
Puisque φ est continue sur $]-1;1[$ et ne s'annule pas, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle reste de signe constant. Or $\varphi(t_0) > 0$, d'où φ est à valeurs strictement positives. Ainsi, vu l'équation différentielle vérifiée, φ' est aussi à valeurs strictement positives, et donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur }]-1;1[.}$
Par conséquent, quand t tend vers -1, $\varphi(t)$ ou bien tend vers $-\infty$, ou bien a une limite finie. Or φ est minorée par 0 sur $]-1;1[$, d'où nécessairement

$$\boxed{\varphi(t) \text{ a une limite finie quand } t \text{ tend vers } -1.}$$