Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

corrigé de l'examen du 14 mai 2019

Exercice 1

a) Existence et unicité de la solution maximale
L'équation (1) est de la forme $y' = \frac{y}{t} + y^2 - 9t^2 = F(t, y)$, où F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[\times\mathbb{R}$. *A fortiori* F est continue et localement lipschitzienne, ce qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz :

$$\boxed{\text{pour toute condition initiale, l'équation (1) admet une unique solution maximale.}}$$

b) Calcul de a
En posant $y(t) = at$, l'équation (1) devient $-a^2t^2 = -9t^2$ pour tout $t > 0$, autrement dit $a^2 = 9$ et comme $a > 0$ on obtient $\boxed{a = 3}$.

c) Montrons que la fonction $t \mapsto at - \varphi(t)$ ne s'annule pas sur J
Posons $f(t) = at$: ainsi f et φ sont deux solutions de (1). Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $f(t_0) = \varphi(t_0)$: alors f et φ sont solutions du même problème de Cauchy (avec condition initiale prise en t_0). Or le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que ce problème admet une unique solution, ce qui implique $f = \varphi$. En particulier on a alors $f(1) = \varphi(1)$ autrement dit $3 = 4$, contradiction. Par conséquent pour tout $t \in J$, $f(t) \neq \varphi(t)$ *i.e.* $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto at - \varphi(t) \text{ ne s'annule pas sur } J}$.

d) i) Montrons que ψ est solution sur J de l'équation différentielle (E_1)
Par définition, $\psi(t) = \frac{1}{3t-\varphi(t)}$ (expression qui a bien un sens sur J d'après la question c)) et donc pour tout $t \in J$,

$$\varphi(t) = 3t - \frac{1}{\psi(t)}$$

On a alors $\varphi'(t) = 3 + \frac{\psi'(t)}{\psi(t)^2}$ et puisque φ est solution de (1) il vient

$$3 + \frac{\psi'(t)}{\psi(t)^2} - \frac{1}{t}\left(3t - \frac{1}{\psi(t)}\right) - \left(3t - \frac{1}{\psi(t)}\right)^2 = -9t^2$$

ce qui donne, après simplification : $\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)^2} + \dfrac{1}{t\psi(t)} - \dfrac{1}{\psi(t)^2} + \dfrac{6t}{\psi(t)} = 0$. Ainsi en multipliant par $\psi(t)^2$, on obtient que $\boxed{\psi \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } J}$.

ii) Solutions de (E_1) sur $]0;+\infty[$

L'équation (E_1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. L'équation homogène associée $y' + (6t + \frac{1}{t})y = 0$ a pour solutions les fonctions

$$t \mapsto \lambda e^{-3t^2 - \ln t} = \lambda \frac{e^{-3t^2}}{t}$$

sur $]0;+\infty[$. Pour déterminer une solution particulière de $(E1)$, on utilise la méthode de variation de la constante : $\phi(t) = \lambda(t)\frac{e^{-3t^2}}{t}$ est solution de (E_1) si et seulement si $\lambda'(t)\frac{e^{-3t^2}}{t} = 1$, autrement dit $\lambda'(t) = te^{3t^2}$. On peut donc choisir $\lambda(t) = \frac{1}{6}e^{3t^2}$, ce qui donne comme solution particulière $\phi(t) = \frac{1}{6t}$.

Les solutions de (E_1) sont la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{les solutions de } (E_1) \text{ sont les fonctions } t \mapsto \frac{1}{6t} + \lambda\frac{e^{-3t^2}}{t} \text{ sur }]0;+\infty[\ (\lambda \in \mathbb{R})}.$$

iii) Calcul de $\psi(t)$

Puisque ψ est solution de (E_1), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t > 0,\ \psi(t) = \dfrac{1}{6t} + \lambda\dfrac{e^{-3t^2}}{t}$. La condition initiale donne $\psi(1) = \frac{1}{3-\varphi(1)} = -1$, d'où $-1 = \frac{1}{6} + \lambda e^{-3}$ *i.e.* $\lambda = -\frac{7e^3}{6}$. Ainsi

$$\boxed{\psi(t) = \frac{1}{6t} - \frac{7e^3e^{-3t^2}}{6t} = \frac{1 - 7e^{3-3t^2}}{6t}}$$

e) Détermination de φ et J

D'après la question d), on a $\forall t \in J,\ \varphi(t) = 3t - \frac{1}{\psi(t)} = 3t + \frac{6t}{7e^{3-3t^2}-1}$. Comme (φ, J) est une solution maximale, J est l'intervalle maximal (contenant $t_0 = 1$, et inclus dans $]0;+\infty[$) sur lequel cette expression a un sens, c'est-à-dire tel que $7e^{3-3t^2} - 1 \neq 0$.

Or $7e^{3-3t^2} - 1 = 0$ si et seulement si $e^{3t^2} = 7e^3$ *i.e.* $t^2 = 1 + \frac{\ln 7}{3}$. Comme on cherche $J \subset]0;+\infty[$, et contenant $1 < \sqrt{1 + \frac{\ln 7}{3}}$, on obtient $J = \left]0; \sqrt{1 + \frac{\ln 7}{3}}\right[$: finalement

$$\boxed{\text{la solution maximale du problème de Cauchy est } t \mapsto 3t + \frac{6t}{7e^{3-3t^2} - 1} \text{ sur } \left]0; \sqrt{1 + \frac{\ln 7}{3}}\right[}.$$

Exercice 2

a) Existence et unicité de la solution maximale

L'équation (2) est une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y(1-y) = F(y)$, avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: en particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre que $\boxed{\text{pour toute condition initiale, le problème admet une unique solution maximale}}$.

b) Solutions stationnaires

La fonction constante égale à c est solution de (2) si et seulement si $0 = \alpha c(1-c)$. Ainsi il y a deux solutions stationnaires : $\boxed{\text{la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à 1}}$.

c) <u>Cas $y_0 \in]0;1[$</u>
Montrons que la fonction φ est alors à valeurs dans $]0;1[$. En effet, s'il existe t_1 tel que $\varphi(t_1) \geq 1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe t_0 tel que $\varphi(t_0) = 1$: alors vu b), φ et la fonction constante égale à 1 sont solutions du même problème de Cauchy (pour la condition initiale $y(t_0) = 1$), donc sont égales d'après a) ; contradiction puisque $\varphi(t_0) < 1$. De même φ ne peut prendre de valeur négative ou nulle sinon elle serait identiquement nulle. Par conséquent $\boxed{\varphi \text{ est à valeurs dans }]0;1[\text{, en particulier elle est bornée}}$.

Supposons par l'absurde que $T^* < +\infty$: d'après le théorème d'explosion en temps fini (qui s'applique sous les mêmes hypothèses que le théorème de Cauchy-Lipschitz), la fonction φ serait alors non bornée quand $t \to T^*$, contradiction. Ainsi $\boxed{T^* = +\infty, \text{ et de même } T_* = -\infty}$. Ainsi φ est définie sur $\mathbb{R}$.
Comme $\varphi' = \alpha\varphi(1-\varphi)$, avec $\alpha > 0$ et φ à valeurs dans $]0;1[$, on a $\varphi'(t) > 0$ pour tout t : on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$. Puisqu'elle est bornée, elle admet donc une limite $\ell^- \in [0;1[$ en $-\infty$ et une limite $\ell^+ \in]0;1]$ en $+\infty$. Calculons ces limites.

Puisque $\varphi(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \ell^-$, on a que $\varphi'(t) = \alpha\varphi(t)(1-\varphi(t)) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \lambda$ avec $\lambda = \alpha\ell^-(1-\ell^-)$ et donc $\lambda \geq 0$. Or on sait que si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que φ et φ' ont des limites finies en $-\infty$ (ou $+\infty$), alors la limite de φ' vaut 0. Redémontrons-le en supposant par l'absurde $\lambda > 0$: alors il existe $A > 0$ tel que $(t \leq -A \Longrightarrow \varphi'(t) \geq \frac{\lambda}{2})$. En particulier,

$$\forall t \leq -A,\ \varphi(-A) - \varphi(t) = \int_t^{-A} \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \geq \int_t^{-A} \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\lambda}{2}(-A-t)$$

et donc $\varphi(t) \leq \varphi(-A) + \frac{\lambda}{2}(A+t)$: on en déduit que $\varphi(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$, contradiction (puisque φ est bornée), par conséquent $\lambda = 0$.
Ainsi $\ell^-(1-\ell^-) = 0$, *i.e.* $\ell^- = 0$ ou $\ell^- = 1$. Or $\ell^- \in [0;1[$ puisque φ est strictement croissante, d'où $\ell^- = 0$. De même on obtient que $\ell^+(1-\ell^+) = 0$ et donc $\ell^+ = 1$.

$$\boxed{\text{Si } y_0 \in]0;1[,\ \varphi(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1.}$$

d) <u>Cas $y_0 > 1$</u>
Montrons que la fonction φ est alors à valeurs dans $]1;+\infty[$. En effet, s'il existe t_1 tel que $\varphi(t_1) \leq 1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe t_0 tel que $\varphi(t_0) = 1$: alors φ et la fonction constante égale à 1 sont solutions du même problème de Cauchy (pour la condition initiale $y(t_0) = 1$), donc sont égales ; contradiction car $\varphi(t_0) > 1$.

On a donc $\varphi'(t) = \alpha\varphi(t)(1-\varphi(t)) < 0$, et $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur }]T_*;T^*[}$. Comme elle est minorée par 1, elle reste bornée entre 1 et $\varphi(0) = y_0$ sur l'intervalle $[0;T^*[$: le théorème d'explosion en temps fini donnerait donc une contradiction si on avait $T^* < +\infty$. Par conséquent $\boxed{T^* = +\infty}$.

Sur $[0;+\infty[$, la fonction φ est décroissante et minorée par 1, elle admet donc une limite finie $\ell \geq 1$. Vu (2), φ' tend en $+\infty$ vers $\alpha\ell(1-\ell)$, et on montre comme dans la question précédente que nécessairement $\alpha\ell(1-\ell) = 0$. Comme $\ell \geq 1$, on en déduit $\ell = 1$ *i.e.* $\boxed{\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1}$.

e) <u>Cas $y_0 < 0$</u>
Dans ce cas, on obtient de la même façon que pour les questions précédentes que φ est à valeurs strictement négatives sur $]T_*; T^*[$. On en déduit $\varphi'(t) = \alpha\varphi(t)(1-\varphi(t)) < 0$ et donc que $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est strictement décroissante}}$.

Puisque φ est majorée par 0 et décroissante, elle reste bornée entre $\varphi(0) = y_0$ et 0 sur l'intervalle $]T_*; 0]$: le théorème d'explosion en temps fini donnerait donc une contradiction si on avait $T_* < +\infty$. Par conséquent $\boxed{T_* = -\infty}$.

Sur $]-\infty; 0]$, la fonction φ est décroissante et majorée par 0, elle admet donc une limite finie $\ell \leq 0$. Vu (2), φ' tend en $+\infty$ vers $\alpha\ell(1-\ell)$, et on montre comme dans les questions précédentse que nécessairement $\alpha\ell(1-\ell) = 0$. Comme $\ell \leq 0$, on en déduit $\ell = 0$ *i.e.* $\boxed{\varphi(t) \xrightarrow[t\to+-\infty]{} 0}$.

f) <u>Portrait de phase</u>
... champ des vitesses et allure de quelques solutions pour des conditions initiales variées...

Exercice 3

a) <u>Indépendance linéaire de f et g</u>
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f + \mu g = 0$ sur I : autrement dit, $\forall t \in I,\ \lambda\frac{e^t}{t} + \mu\frac{e^{-t}}{t} = 0$. On obtient alors $\lambda + \mu e^{-2t} = 0$ pour tout $t > 0$, ce qui en passant à la limite quand $t \to +\infty$ donne $\lambda = 0$ et par conséquent $\mu = 0$. Ainsi $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont bien linéairement indépendantes sur } I}$.

b) <u>Ecriture sous forme d'un système d'ordre 1</u>
Posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$: alors

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \begin{cases} y \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \\ y' = y' \\ y'' = -a(t)y' - b(t)y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} Y \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ Y' = \begin{pmatrix} y' \\ -a(t)y' - b(t)y \end{pmatrix} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} Y \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ Y' = A(t)Y \end{cases}
\end{aligned}$$

où $\boxed{A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}}$.

c) i) <u>Système fondamental de solutions de (S)</u>
Puisque (S) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble de ses solutions forme un espace vectoriel de dimension 2. Il s'agit donc de trouver deux solutions de (S) qui sont linéairement indépendantes.

Or par hypothèse, les fonctions f et g sont solutions de (E), par conséquent les fonctions $F = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ sont solutions de (S). Vérifions que F et G sont linéairement indépendantes : en effet, si $\lambda F + \mu G = 0$, la première composante donne $\lambda f + \mu g = 0$ et donc d'après la question a) : $\lambda = \mu = 0$. Ainsi

$$\boxed{F = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \text{ forment un système fondamental de solutions de } (S).}$$

ii) Calcul de $W(t)$

Par définition, $W(t) = \det(F(t), G(t)) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ avec

$$f(t) = \frac{e^t}{t} \quad \text{et} \quad f'(t) = e^t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) \quad ; \quad g(t) = \frac{e^{-t}}{t} \quad \text{et} \quad g'(t) = e^{-t}\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right).$$

En remplaçant, il vient $\boxed{W(t) = -\dfrac{2}{t^2} \text{ pour } t \in I}$.

iii) Expression de $a(t)$

On sait que W vérifie $W' = \mathrm{Tr}(A(t))W = -a(t)W$. Puisque $W(t) = -\frac{2}{t^2}$, on obtient $\boxed{a(t) = \dfrac{2}{t} \text{ pour } t \in I}$.

iv) Condition sur $b(t)$

L'équation (E) devient donc $y'' + \frac{2}{t}y' + b(t)y = 0$. La fonction f, qui ne s'annule pas, est solution si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$b(t) = \frac{-f''(t) - \frac{2}{t}f'(t)}{f(t)} = \frac{-e^t(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3}) - \frac{2}{t}e^t(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2})}{\frac{e^t}{t}} = -1$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } b(t) = -1 \text{ pour } t \in I}$, et l'équation devient donc

$$(E) \quad y'' + \frac{2}{t}y' - y = 0$$

Comme $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$, $g'(t) = e^{-t}(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2})$ et $g''(t) = e^{-t}(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3})$, on vérifie que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est bien solution de l'équation } y'' + \frac{2}{t}y' - y = 0}$.

d) Solution générale de $y'' + \frac{2}{t}y' - y = 0$ sur I

C'est une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre 1 : ses solutions forment donc un espace vectoriel de dimension 2. Vu les questions c)iv) et a), les deux fonctions f et g sont solutions et sont linéairement indépendantes, ainsi elles forment une base de l'espace des solutions. Autrement dit,

$$\boxed{\text{la solution générale de } y'' + \tfrac{2}{t}y' - y = 0 \text{ sur } I \text{ est } \{t \mapsto \lambda\tfrac{e^t}{t} + \mu\tfrac{e^{-t}}{t}\}.}$$

e) <u>Solutions sur I de (3)</u>
Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 avec second membre. Vu d), on connaît les solutions de l'équation homogène, il reste donc à trouver une solution particulière. Pour cela on va utiliser la méthode de variation des constantes. Commençons donc par réécrire (3) sous la forme d'une équation d'ordre 1 : avec les notations de la question b),

$$y'' + \frac{2}{t}y' - y = \frac{e^t}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad Y' = A(t)Y + B(t)$$

en posant $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{t} \end{pmatrix}$. Sous cette forme, l'équation homogène associée est le système (S), dont d'après c)i) on connaît un système fondamental de solutions. On va donc chercher une solution particulère sous la forme $Y_p(t) = \lambda(t)F(t) + \mu(t)G(t)$:

$$\begin{aligned}
Y_p \text{ est solution} \quad &\Longleftrightarrow \quad Y' = AY + B \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda' F + \lambda F' + \mu' G + \mu G' = A(\lambda F + \mu G) + B \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda' F + \mu' G = B \text{ (puisque } F \text{ et } G \text{ sont solutions de } (S)) \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda' \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} = B \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)f(t) + \mu'(t)g(t) = 0 \\ \lambda'(t)f'(t) + \mu'(t)g'(t) = \frac{e^t}{t} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \begin{cases} \lambda'(t)\frac{e^t}{t} + \mu'(t)\frac{e^{-t}}{t} = 0 \\ \lambda'(t)e^t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) + \mu'(t)e^{-t}\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) = \frac{e^t}{t} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \begin{cases} \mu'(t) = -e^{2t}\lambda'(t) \\ \lambda'(t)\frac{2e^t}{t} = \frac{e^t}{t} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I, \begin{cases} \mu'(t) = -\frac{e^{2t}}{2} \\ \lambda'(t) = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut donc choisir $\lambda(t) = \frac{t}{2}$ et $\mu(t) = -\frac{e^{2t}}{4}$, ce qui donne $Y_p(t) = \frac{t}{2}F(t) - \frac{e^{2t}}{4}G(t)$. La première composante de Y_p donne une solution particulière de (3) :

$$y_p(t) = \frac{t}{2}f(t) - \frac{e^{2t}}{4}g(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^t}{4t}$$

Les solutions de (3) sont obtenues en faisant la somme des solutions de l'équation homogène et de cette solution particulière. Cela donne donc les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\frac{e^t}{t} + \mu\frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^t}{2} - \frac{e^t}{4t}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$. Quitte à changer λ en $\lambda - \frac{1}{4}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{les solutions de (3) sur } I \text{ sont les fonctions } t \mapsto \lambda\frac{e^t}{t} + \mu\frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^t}{2}.}$$

Exercice 4

a) Existence et unicité de la solution maximale

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $F(X) = \begin{pmatrix} x - xy \\ -y + xy \end{pmatrix}$: le système s'écrit alors $X' = F(X)$, avec F de classe $\mathcal{C}^1$. En particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre que $\boxed{\text{il existe une unique solution maximale}}$.

b) Solutions stationnaires

Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} 0 = x - xy \\ 0 = -y + xy \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ y = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$. On a ainsi $\boxed{\text{deux solutions stationnaires : } (0,0) \text{ et } (1,1)}$.

c) Solutions spéciales

On cherche ici les solutions dont les trajectoires sont incluses dans l'un des axes de coordonnées. La fonction $(\varphi_1, 0)$ est solution si et seulement si φ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi_1' = \varphi_1$, autrement dit s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_1(t) = \lambda e^t$. La fonction $(0, \varphi_2)$ est solution si et seulement si φ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi_2' = -\varphi_2$, autrement dit s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_2(t) = \mu e^{-t}$.

Ainsi $\boxed{\text{les solutions dont les trajectoires sont incluses dans l'axe } (0x) \text{ sont les } t \mapsto (\lambda e^t, 0)}$ et $\boxed{\text{les solutions dont les trajectoires sont incluses dans l'axe } (0y) \text{ sont les } t \mapsto (0, \mu e^{-t})}$.

d) i) Montrons que φ_1 et φ_2 sont à valeurs strictement positives

Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $\varphi_1(t_0) \leq 0$: puisque φ_1 est continue et que $\varphi_1(0) = x_0 > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_1 \in J$ tel que $\varphi_1(t_1) = 0$. Alors les fonctions (φ_1, φ_2) et $(0, \mu e^{-t})$ avec $\mu = \varphi_2(t_1)e^{t_1}$ sont solutions du même problème de Cauchy : le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui d'après la question a) s'applique bien) donne donc $\varphi_1 = 0$ (et $\varphi_2(t) = \mu e^t$), ce qui contredit la condition $\varphi_1(0) = x_0 > 0$. De même, on obtient que φ_2 est à valeurs strictement positives.

$$\boxed{\text{Les fonctions } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ sont à valeurs strictement positives.}}$$

ii) Lignes de niveau

Il s'agit de montrer que la fonction $f : t \mapsto h(\varphi_1(t)) + h(\varphi_2(t))$ est constante sur J ; si c'est le cas, la constante sera nécessairement égale à $C = f(t_0)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que J est un intervalle, il suffit de montrer que f' est identiquement nulle sur J. Or

$$\begin{aligned} f'(t) &= \varphi_1'(t)h'(\varphi_1(t)) + \varphi_2'(t)h'(\varphi_2(t)) \\ &= \varphi_1'(t)\left(1 - \frac{1}{\varphi_1(t)}\right) + \varphi_2'(t)\left(1 - \frac{1}{\varphi_2(t)}\right) \\ &= (\varphi_1(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(t))\left(1 - \frac{1}{\varphi_1(t)}\right) + (-\varphi_2(t) + \varphi_1(t)\varphi_2(t))\left(1 - \frac{1}{\varphi_2(t)}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall t \in J,\ h(\varphi_1(t)) + h(\varphi_2(t)) = h(\varphi_1(t_0)) + h(\varphi_2(t_0))}$.

iii) Etude de la fonction h

La fonction h est dérivable et $h'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ est négative si $0 < x < 1$ et positive si $x > 1$; par conséquent h est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. Elle tend vers $+\infty$ en 0 et en $+\infty$. En particulier h est minorée par $h(1) = 1$, $\boxed{h \text{ est donc à valeurs positives}}$.

Il reste à montrer que l'image réciproque par h de l'intervalle $]0;C]$ est bornée. Si $C < 1$, $h^{-1}(]0;C]) = \emptyset$. Si $C \geq 1$, puisque h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $h(1) = 1$ et $h(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$, il existe un unique $M \geq 1$ tel que $h(M) = C$.

Soit alors $x > 0$ tel que $h(x) \leq C$: ou bien $0 < x \leq 1$, ou bien $x > 1$ et dans ce cas par construction $x \leq M$. Dans les deux cas on a donc $x \leq M$, autrement dit

$$\boxed{h(x) \leq C \implies 0 < x \leq M}$$

iv) Montrons que φ_1 et φ_2 sont bornées

Puisque $h(\varphi_1) + h(\varphi_2)$ est constante égale à C vu ii), et que h est à valeurs positives, on a donc $0 \leq h(\varphi_1) \leq C$ et $0 \leq h(\varphi_2) \leq C$. Par conséquent ii) implique que $\boxed{\text{pour tout } t \in J,\ 0 < \varphi_1(t) \leq M \text{ et } 0 < \varphi_2(t) \leq M}$.

v) Montrons que la solution maximale est globale

D'après iv) la solution maximale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est bornée. En appliquant la contraposée du théorème d'explosion en temps fini, on obtient que $\boxed{\text{cette solution est globale}}$.