Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

TP 4 - Écologie des populations

Dans ce TP, on s'intéresse à l'évolution de deux espèces qui sont en compétition pour l'accès aux ressources vitales. On peut penser par exemple à deux variétés de sternes (il s'agit d'oiseaux !) sur un même île qui seraient en compétition pour l'accès à la nourriture et aux lieux de nidation.

On notera x et y les densités de population et on écrira le système différentiel sous la forme :

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y), \\ y' = f_2(x,y). \end{cases}$$

où

$$f_1(x,y) = x(K_1 - x - \alpha y)/K_1 \text{ et } f_2(x,y) = y(K_2 - \beta x - y)/K_2,$$

avec $\alpha, \beta \in]0,1]$ et $K_1, K_2 > 0$.

On considère des conditions initiales (x_0, y_0) (à $t = 0$) telles que $x_0, y_0 \geq 0$. On définit l'ensemble suivant :

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 < x < K_2/\beta, 0 < y < K_1/\alpha\}.$$

1. Montrer que, quel que soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale $(\Phi = (x,y),]T_*, T^*[)$.
2. Montrer que le système admet des solutions de la forme $(x(t), 0)$ et $(0, y(t))$ (il n'est pas nécessaire de les calculer).
3. En déduire que si $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ alors $(x(t), y(t)) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ pour tout $t \in]T_*, T^*[$.
4. Déterminer les courbes ℓ_1 et ℓ_2 définies respectivement par $f_1(x,y) = 0$ et $f_2(x,y) = 0$.
5. Déterminer les points d'équilibre du système. Comment peut-on interpréter les différents points d'équilibre en terme de cohabitation des espèces ?
6. Soit $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, $K_1 = 100$, $K_2 = 50$. Représenter sur un même graphique le champ des vitesses, les courbes ℓ_1, ℓ_2 et les points d'équilibre dans le domaine $[0, 250] \times [0, 250]$.
7. Identifier les zones pour lesquelles x' et y' sont de signes constants (il y a 4 zones à identifier).
8. Soit $(x_0, y_0) \in Q$. Démontrer que $T^* = +\infty$ puis que toutes les orbites incluses dans Q convergent vers le même point quand t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire sur la cohabitation des espèces ?
9. Compléter le portrait de phase débuté en 6. en ajoutant quelques solutions.
10. Reprendre l'étude pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $K_1 = 100$, $K_2 = 50$.