Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

TP 3 - Le pendule

On considère un pendule composé d'une tige rigide de longueur ℓ, dont on négligera le poids, et au bout de laquelle est accrochée une masse ponctuelle m. Ce pendule est suspendu à un point fixe. Il est soumis à la gravité et éventuellement à des forces de frottement. On note g l'accélération de la pesanteur et $c \in \mathbb{R}^+$ le coefficient de frottement.

1. Questions préliminaires

On repère la position du pendule à tout instant grâce à l'angle θ entre la tige et la verticale. On suppose qu'à l'instant initial le pendule est écarté de la verticale d'un angle θ_0 et qu'il est lâché avec une vitesse ω_0. L'évolution de θ au cours du temps est donnée par l'équation différentielle :

$$\theta'' + \frac{c}{m}\theta' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \tag{1}$$

1. Écrire l'équation différentielle (1) sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 :

$$Y' = F(Y) \tag{2}$$

   avec $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ puis écrire le problème de Cauchy associé.
2. Montrer que, quelle que soit la condition initiale (θ_0, ω_0), le problème (1) admet une unique solution globale.
3. Soit $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{\ell}(1 - \cos x) \tag{3}$$

   et $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = E(\theta(t), \theta'(t))$ pour θ une solution de (1). Calculer $H'(t)$. Qu'en déduit-on sur H (on pourra distinguer le cas $c = 0$ du cas $c > 0$) ?
4. Déterminer les points d'équilibre du système (2).
5. Calculer la jacobienne de F en tout point $Y \in \mathbb{R}^2$ puis $A = JF_{(0,0)}$.
6. Donner la forme générale des solutions du système différentiel $X' = AX$ (on pourra distinguer les cas $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{\ell}$, $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{\ell}$, $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{g}{\ell}$).

2. Étude du cas sans frottements, $c = 0$

Dans toute la suite, on prendra comme valeurs numériques $g = 10$, $\ell = 5$ et $m = 1$. Dans cette partie, on suppose que $c = 0$.

Pour les graphiques demandés, vous pouvez avoir besoin de différentes fonctions de la librairie `matplotlib` et de son module `matplotlib.pyplot` (importé comme `plt`) que vous trouverez à l'adresse suivante : `https://matplotlib.org/index.html`. On rappelle les fonctions déjà recontrées : `plt.figure`, `plt.plot`, `plt.title`, `plt.quiver`, `plt.contour` et également `Axes3D` importée de `mpl_toolkits.mplot3d`. On suggère d'utiliser également la fonction `plt.subplot` qui permet de représenter plusieurs graphiques dans une même fenêtre.

1. Représenter la surface $z = E(x, y)$ pour $x \in [-10, 10]$ et $y \in [-6, 6]$.
2. Sur une une même figure, représenter les lignes de niveaux $E(x, y) = k$ pour les valeurs de $k = 0.1, 0.4, 0.7, 1, 2, 4, 6, 10, 13, 16$, ainsi que le champ de vecteurs associé au système (2).
3. Réaliser le portrait de phase du système (2). On limitera la représentation graphique à la fenêtre $[-10, 10] \times [-6, 6]$ et le portrait de phase devra mettre en évidence :
   — des solutions périodiques ou constantes,
   — des solutions non bornées et telles que $t \to \theta(t)$ est strictement monotone,
   — des solutions hétéroclines, c'est-à-dire telles qu'il existe deux valeurs $\theta_+ \in \mathbb{R}$ et $\theta_- \in \mathbb{R}$ telles que
$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_+ \text{ et } \lim_{t \to -\infty} \theta(t) = \theta_-.$$

3. Étude du pendule amorti, $c > 0$

Dans cette partie, on s'intéresse au pendule amorti. Dans un premier temps, on suppose que $c = 1$.

1. Réaliser le portrait de phase du système (2) en se limitant au domaine $[-10, 10] \times [-6, 6]$. Le portrait de phase représentera le champ de vecteurs associé au système ainsi qu'un nombre raisonnable de solutions significatives.
2. Réaliser le portrait de phase du système linéaire $X' = AX$ en vous limitant à la fenêtre $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
3. Comparer les deux portraits de phase sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Reprendre ensuite les questions pour $c = 2$ et $c = 3$.

4. Et si on bougeait ?

Téléchargez le fragment de code `animPendule` sur moodle, et utilisez le pour animer vos pendules dans les différents cas traités précédemment. On peut par exemple choisir comme condition initiale $\theta(0) = \dfrac{\pi}{4}, \theta'(0) = 1$ et comparer les résultats obtenus sur un intervalle de temps $[0, 10]$ dans les cas $c = 0$, $c = 1$ et $c = 3$.