Université de Lille **L3 Mathématiques**
2018-2019 **M-62**

TP 2 - Systèmes différentiels

Lorsqu'on étudie un système différentiel d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$, de la forme

$$\begin{cases} x' = F_1(t,(x,y)) \\ y' = F_2(t,(x,y)) \end{cases}$$

et qu'on veut représenter graphiquement les solutions, il y a plusieurs choix possibles.

(1) Tracer (dans $\mathbb{R}^3$) le graphe de la fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$.

(2) Tracer (dans $\mathbb{R}^2$) les graphes des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$; ce sont les projections du graphe (1) dans les plans (t,x) resp. (t,y). Ils sont plus embrouillés que les graphes des solutions d'une équation scalaire d'ordre 1, car les courbes peuvent se croiser.

(3) Tracer (dans $\mathbb{R}^2$) la courbe paramétrée $\{(x(t), y(t)) \mid t \in J\}$; c'est la projection du graphe (1) dans le plan (x,y), appelé *plan de phase*.

On appelle *portrait de phase* l'ensemble des projections des solutions dans le plan de phase. On réserve en général ce terme aux équations autonomes $\begin{cases} x' = F_1(x,y) \\ y' = F_2(x,y) \end{cases}$. Dans la pratique, on dit qu'on a dessiné le portrait de phase d'une équation autonome lorsqu'on a dessiné suffisamment de courbes pour pouvoir deviner le comportement des autres.

Il est très utile de représenter également le champ de vecteurs associé au système différentiel : il s'agit de dessiner le vecteur de coordonnées $(F_1(x,y), F_2(x,y))$ basé au point de coordonnées (x,y). On aura ainsi, pour tout t, le vecteur tangent à la courbe solution au point $(x(t), y(t))$.

Pour tracer un graphe dans l'espace, on utilise `Axes3D` de la bibliothèque mpl_toolkits. Par exemple, pour obtenir le graphe de $t \mapsto (t^2, t\sin(2t))$:

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        import numpy as np
In [2]: t=np.linspace(-5,5,100)
        x=t**2
        y=t*np.sin(2*t)
        dessin=Axes3D(plt.figure())
        dessin.plot(t,x,y)
        dessin.legend()
        dessin.set_xlabel('t')
```

1. Portraits de phase

Exercice 1.
On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.

a) Résoudre ce système en posant $z = x + iy$. Déterminer les solutions (x_k, y_k) correspondant aux conditions initiales $x_k(0) = k,\ y_k(0) = 0$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

b) Tracer, sur une même figure, les graphes des fonctions x_k (en trait plein) et y_k (en pointillé) pour $t \in [-4\pi; 4\pi]$.

c) Tracer dans $\mathbb{R}^3$ les graphes des solutions $t \mapsto (x_k(t), y_k(t))$.

d) Représenter ces solutions, ainsi que le champ de vecteurs, dans le plan de phase.

Exercice 2.
Le système différentiel $\begin{cases} x'(t) &= (t+3)x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= -4x(t) + (t-3)y(t) \end{cases}$ admet sur $\mathbb{R}$ les solutions

$$\begin{cases} x(t) = e^{t^2/2}(ae^t + be^{-t}) \\ y(t) = e^{t^2/2}(-ae^t - 2be^{-t}) \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Ecrire une fonction Python `TracePhase(choix_constantes)` qui, pour un tableau `choix_constantes` de couples $[a, b]$, trace les solutions correspondantes dans le plan de phase (x, y) en faisant varier t de -3 à 3, dans la fenêtre $x \in [0; 15]$, $y \in [-30, 0]$.

b) L'appliquer à `choix_constantes`$=[[1, 1], [1, 5], [3, 2], [2, 2]]$.

c) Que constate-t-on de différent par rapport à l'exercice précédent ? Expliquer.

2. Intégrer un système différentiel avec odeint

La fonction `odeint` permet, comme pour une équation différentielle scalaire, de représenter une approximation numérique des solutions d'un système. Par exemple, pour $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$:

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
        from scipy.integrate import odeint
In [2]: def F(X,t):
        return [X[0],-2*X[1]]
        t=np.linspace(-100,100,1000)
        condition_initiale=[[1,4],[-0.5,3],[1,-3],[-1,-5]] #[x(-100),y(-100)]
        plt.axis([-10,10,-3,3]) # abscisses: [-10;10], ordonnées: [-3;3]
        for a,b in condition_initiale:
                v=odeint(F,[a,b],t)
```

```
            CI=''x(0)={0},y(0)={1}''.format(a,b)
            plt.plot(v[:,0],v[:,1],label=CI)
    plt.legend()
```

Exercice 3.

On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tracer le champ de vecteurs associé dans la fenêtre $x \in [-5; 5]$, $y \in [-5; 5]$.

b) Tracer, sur la même figure, les solutions pour t variant de -10 à 10 pour chacune des conditions initiales suivantes :

$$(x(-10), y(-10)) = (1, 2)\ ;\ (-2, -2)\ ;\ (0, -4)\ ;\ (-4, 0.5)\ ;\ (3, 4).$$

c) Déterminer les sous-espaces propres de A et les représenter sur la figure.

Exercice 4.

a) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(u) = \left| \begin{array}{l} e^{-1/u} \text{ si } u > 0 \\ 0 \text{ si } u \leq 0 \end{array} \right.$$

La représenter graphiquement.

b) Représenter le portrait de phase du système différentiel

$$\begin{cases} x' = y - x \cdot f(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y \cdot f(x^2 + y^2) \end{cases}$$

dans la fenêtre $x \in [-3; 3]$, $y \in [-3; 3]$ pour t variant de -10 à 10.

c) Ce système est, au voisinage de l'origine, une petite perturbation du système de l'exercice 1 : comparer les deux portraits de phase.

3. Lignes de niveaux

Même sans calculer explicitement les solutions, on peut avoir des informations sur l'allure des solutions : c'est le cas par exemple lorsqu'on sait que les trajectoires des solutions dans le plan de phase sont incluses dans les lignes de niveaux $\{(x, y) \mid g(x, y) = c\}$ d'une fonction g de deux variables. Voici comment tracer ces lignes de niveaux à l'aide de `plt.contour`, par exemple pour la fonction $g(x, y) = x^2 + 7y^2(1 + \arctan(\sin x))$:

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
```

```
In [2]: def g(x,y):
        return (x**2+7*(y**2)*(1+np.arctan(np.sin(x))))
        N=1000
        x=np.linspace(-4,4,N)
        y=np.linspace(-3,3,N)
        xx,yy=np.meshgrid(x,y)
        zz=g(xx,yy)
        C=np.linspace(1,15,5)
        lignes_niveaux=plt.contour(xx,yy,zz,levels=C)
        plt.clabel(lignes_niveaux,C,fmt='%1.0f')
```

Exercice 5. On considère l'équation différentielle $y'' = -y - y^3$.

a) L'écrire sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1. Représenter le champ de vecteurs associé dans la fenêtre $x \in [-10; 10]$, $y \in [-10; 10]$.

b) Montrer que, pour toute solution (φ, J), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in J,\ g(\varphi(t), \varphi'(t)) = c$ où

$$g(x, y) = 2x^2 + x^4 + 2y^2$$

c) Sur la même figure, tracer les lignes de niveaux de la fonction g pour $c = 10\,;\,80\,;\,180$.

d) Ajouter le tracé des solutions correspondant aux conditions initiales

$$(y(-10), y'(-10)) = (-2, 2)\ ,\ (-1, 0.5)\ ,\ (3, 4)$$