Université de Lille **L3 Mathématiques**
2017-2018 **M-62**

Session 2 - 27 juin 2018
Durée 3h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La correction tiendra compte de la rédaction : les raisonnements doivent être exposés rigoureusement, et les théorèmes utilisés doivent être énoncés précisément.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle

$$t^2y'' - ty' + y = 0 \qquad (E_1)$$

1. On se place d'abord sur l'un des deux intervalles $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, noté I. Justifier que pour toute condition initiale prise en $t_0 \in I$, il existe une unique solution maximale, et préciser sur quel intervalle celle-ci est définie. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions sur I ?
2. Vérifier que la fonction $\psi : t \mapsto t$ est solution de (E_1).
3. Soit φ telle que (φ, ψ) constitue un système fondamental de solutions de (E_1) sur I.
   (a) On note W le wronskien associé : rappeler la définition de $W(t)$, et l'équation différentielle satisfaite par W. Déterminer $W(t)$.
   (b) En déduire un choix possible pour φ de sorte que (φ, ψ) soit bien un système fondamental de solutions de (E_1) sur I.
4. Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$y'' + y^5 = 0 \qquad (E_2)$$

1. Montrer que pour toute condition initiale, il existe une unique solution maximale (φ, J).
2. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $L(x_1, x_2) = \dfrac{1}{3}x_1^6 + x_2^2$, et $\mathcal{N}_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid L(x, y) = c\}$ (où $c \in \mathbb{R}$) les lignes de niveau de la fonction L. Montrer que pour tout c,
$$\exists M_c \geq 0 \mid \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{N}_c, \begin{cases} |x_1| \leq M_c \\ |x_2| \leq M_c \end{cases}$$
3. Montrer que $\{(\varphi(t), \varphi'(t)) \mid t \in J\}$ est inclus dans une ligne de niveau de L.
4. En déduire que les solutions de l'équation (E_2) sont globales.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante sur $]0;+\infty[$:

$$y'' + \frac{1}{4t^2}y = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad (E_3)$$

et on note (E_3^H) l'équation homogène associée.

1. Réécrire (E_3) sous la forme d'un système différentiel

$$Y' = A(t) \cdot Y + B(t) \qquad (\tilde{E}_3)$$

   où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.

2. On s'intéresse d'abord à l'équation homogène (E_3^H).
   (a) Résoudre (E_3^H) *(pour cela on pourra commencer par chercher des solutions de la forme* $\sqrt{t}(\ln t)^k$, $k \in \mathbb{N}$*).*
   (b) Donner un système fondamental de solutions de (E_3^H). En déduire un système fondamental de solutions de l'équation homogène $Y' = A(t) \cdot Y$ associée à $(\tilde{E}_3)$.
3. Résoudre l'équation (E_3) à l'aide de la méthode de variation des constantes.

Exercice 4

On considère le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = -y \\ y' = x(1+y) \end{cases}$$

1. Justifier que, pour toute condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, il existe une unique solution maximale (φ, J).
2. Déterminer les points critiques. Vérifier qu'il existe des solutions de la forme $t \mapsto (x(t), -1)$ et les expliciter.

On suppose désormais que $x_0 = 0$ et $y_0 < -1$, et on écrit en coordonnées $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

3. Montrer que $\psi : t \mapsto (-\varphi_1(-t), \varphi_2(-t))$ est solution sur l'intervalle $-J$, où $-J$ désigne le symétrique de J par rapport à 0. En déduire que l'intervalle J est de la forme $]-a;a[$ (avec $a \in]0;+\infty]$) et que la trajectoire de φ est symétrique par rapport à l'axe $\{x = 0\}$.
4. On note $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y < -1\}$.
   (a) Déterminer l'allure du champ de vecteurs sur l'axe $\{x = 0\}$. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]0;\varepsilon[$, $\varphi(t) \in \mathcal{A}$.
   (b) Montrer que pour tout $t \in]0;a[$, $\varphi(t) \in \mathcal{A}$; quel est le signe de $\varphi_1'(t)$ et $\varphi_2'(t)$?

5. On suppose que $\varphi_2(t)$ a une limite finie ℓ_2 quand $t \to a^-$.
   (a) Justifier que $l_2 < -1$, et que $\varphi_1'(t) \xrightarrow[t \to a^-]{} -\ell_2$.
   (b) Premier cas : on suppose $a \in \mathbb{R}$.
   Montrer que φ_1' est bornée sur $[0; a[$, puis que φ_1 est bornée sur $[0; a[$; en déduire une contradiction.
   (c) Second cas : on suppose $a = +\infty$.
   Montrer que $\varphi_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ et que $\varphi_2'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$; puis que $\varphi_2(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$ et obtenir une contradiction.
   (d) Que peut-on en déduire sur le comportement de $\varphi_2(t)$ quand $t \to a^-$?
6. On suppose que $\varphi_1(t)$ a une limite finie ℓ_1 quand $t \to a^-$.
   (a) Premier cas : on suppose $a \in \mathbb{R}$, et on note $f(t) = \ln|1 + \varphi_2(t)|$.
   Calculer $f'(t)$ et montrer qu'elle a une limite finie quand $t \to a^-$; en déduire que f est bornée sur $[0; a[$ et obtenir une contradiction.
   (b) Second cas : on suppose $a = +\infty$.
   Montrer que $\varphi_1'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ et que $\varphi_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$; en déduire une contradiction.
   (c) Que peut-on en déduire sur le comportement de $\varphi_1(t)$ quand $t \to a^-$?
7. Représenter l'allure des trajectoires complètes pour quatre valeurs de $y_0 < -1$.