Corrigé du rattrapage - 27 juin 2018

Exercice 1 (cf cours) : $t^2y'' - ty' + y = 0$

1. Structure de l'ensemble des solutions sur $I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$

Sur I : $(E_1) \iff y'' - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 0$

$$\iff \begin{cases} y' = y' \\ y'' = -\frac{1}{t^2}y + \frac{1}{t}y' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

qu'on écrit donc $Y' = A(t)Y$, où $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une application continue.

Ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique : $\boxed{\text{pour tout } t_0 \in I, \text{ et pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2, \text{ il existe une unique solution maximale } \varphi \text{ vérifiant } \begin{cases} \varphi(t_0) = a \\ \varphi'(t_0) = b \end{cases} \text{ et de plus } \varphi \text{ est solution sur } I \text{ entier.}}$

Comme l'équation est linéaire homogène d'ordre 2, on sait alors que

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } I \text{ est un espace vectoriel de dimension 2.}}$

2. Solution évidente

En posant $\varphi(t) = t$, on a bien que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi'(t) = 1$ et $\varphi''(t) = 0$, et donc $t^2\varphi''(t) - t\varphi'(t) + \varphi(t) = -t + t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

3 a) Expression de $W(t)$

Par définition : $\boxed{\forall t \in I,\ W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi(t) & \varphi(t) \\ \varphi'(t) & \varphi'(t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \varphi(t) & t \\ \varphi'(t) & 1 \end{pmatrix}}$

et on sait que $\boxed{\forall t \in I,\ W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\,W(t) = \frac{1}{t}W(t)}$

autrement dit W est solution sur I de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' = \frac{1}{t} y$. Par conséquent

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \forall t \in I, \quad W(t) = \lambda e^{\ln|t|} = \lambda |t| = \tilde{\lambda} t}$$

(en posant $\tilde{\lambda} = \lambda$ si $I = \mathbb{R}^{+*}$, ou $\tilde{\lambda} = -\lambda$ si $I = \mathbb{R}^{-*}$)

3.b) Expression de $\varphi(t)$

Vu 3.a), $\tilde{\lambda} t = W(t) = \varphi(t) - t\varphi'(t)$ sur I, ie :

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) - \frac{1}{t}\varphi(t) = -\tilde{\lambda}$$

Ainsi φ est également solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (avec second membre) qu'on sait résoudre :

- l'équation différentielle homogène est $y' - \frac{1}{t} y = 0$, dont on a déjà montré que les solutions sur I sont les $t \mapsto \mu t$ $(\mu \in \mathbb{R})$.
- cherchons une solution particulière par la méthode de variation de la constante : si $\varphi(t) = \mu(t)\, t$, alors

$$\varphi'(t) - \frac{1}{t}\varphi(t) = -\tilde{\lambda} \iff \mu'(t)\, t = -\tilde{\lambda} \iff \mu'(t) = -\frac{\tilde{\lambda}}{t}$$

$$\iff \mu(t) = -\tilde{\lambda} \ln|t| + \text{cste}$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est de la forme } (-\tilde{\lambda} \ln|t| + c)\, t = \varphi(t) \quad (\tilde{\lambda}, c \in \mathbb{R}).}$

Pour que φ et ψ soient linéairement indépendantes, il faut (et il suffit) $\tilde{\lambda} \neq 0$.

On peut par exemple choisir $\varphi(t) = (\ln|t|) \times t$: en effet, on vérifie que si $\forall t \in I$, $\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) = 0$ ie $\alpha t \ln|t| + \beta t = 0$

alors en $|t| = 1$ on obtient $\beta = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$

et donc <u>φ et ψ sont bien linéairement indépendantes</u>.

$$\boxed{\text{En posant } \varphi : t \mapsto t \ln|t| \text{ et } \psi : t \mapsto t : \quad (\varphi, \psi) \text{ forme bien un système fondamental de solutions sur } I =]-\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[.}$$

4. Solutions sur $\mathbb{R}$

Vu 3.b), on a que les solutions de (E_1) sur I sont les

$$t \mapsto \alpha t \ln|t| + \beta t \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Il reste à voir si ces solutions se recollent de façon deux fois dérivable en 0 pour donner une solution sur $\mathbb{R}$.

Si f est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, alors f est solution sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

donc $\exists\, \alpha^+, \beta^+, \alpha^-, \beta^- \in \mathbb{R} \mid \quad f(t) = \begin{cases} \alpha^+ t \ln(t) + \beta^+ t & \text{si } t > 0 \\ \alpha^- t \ln(-t) + \beta^- t & \text{si } t < 0 \end{cases}$

- prolongement par continuité :

$$f(t) \xrightarrow[t \underset{>}{\to} 0]{} 0 \quad \text{et} \quad f(t) \xrightarrow[t \underset{<}{\to} 0]{} 0 \qquad \text{pour toutes valeurs de } \alpha^+, \beta^+, \alpha^-, \beta^-$$

- dérivabilité d'ordre 1 :

$$f'(t) = \begin{cases} \alpha^+ (\ln t + 1) + \beta^+ & \text{si } t > 0 \\ \alpha^- (\ln(-t) + 1) + \beta^- & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{et } f'(t) \xrightarrow[t \underset{>}{\to} 0]{} \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha^+ > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha^+ < 0 \\ \beta^+ & \text{si } \alpha^+ = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f'(t) \xrightarrow[t \underset{<}{\to} 0]{} \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha^- > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha^- < 0 \\ \beta^- & \text{si } \alpha^- = 0 \end{cases}$$

Ainsi pour que f soit dérivable en 0, il faut $\alpha^+ = \alpha^- = 0$ et $\beta^+ = \beta^-$, ce qui donne $f(t) = \beta t \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

- Réciproquement, si $\beta \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \beta t$ est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de (E_1) vu 2).

Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les } t \longmapsto \beta t \quad (\beta \in \mathbb{R}).}$

Exercice 2 : $y'' + y^5 = 0$

1. Existence et unicité de la solution maximale

On peut réécrire (E_2) sous la forme $Y' = F(Y)$, où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t\right) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1^5 \end{pmatrix}$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, a fortiori continue et localement lipschitzienne, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre que :

$\boxed{\text{pour toute condition initiale, il existe une unique solution maximale.}}$

2. Les lignes de niveau de la fonction L sont bornées

Soit $c \in \mathbb{R}$ fixé, $\mathcal{N}_c := \{(x_1, x_2) \mid L(x_1, x_2) = c\}$:

alors si $(x_1, x_2) \in \mathcal{N}_c$, on a $\frac{1}{3} x_1^6 + x_2^2 = c$ (et donc nécessairement $c \geq 0$) on doit avoir :
$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{3} x_1^6 \leq c \\ 0 \leq x_2^2 \leq c \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} |x_1| \leq \sqrt[6]{3c} \\ |x_2| \leq \sqrt{c} \end{cases}$

$\boxed{\text{Ainsi, si } \mathcal{N}_c \neq \emptyset, \text{ on a nécessairement } c \geq 0 \text{ et avec } M_c := \max(\sqrt[6]{3c}, \sqrt{c}) \text{ on a : } \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{N}_c, \begin{cases} |x_1| \leq M_c \\ |x_2| \leq M_c \end{cases}}$

3. Montrons que $(\varphi, \varphi')(J)$ est inclus dans une ligne de niveau de L

Il s'agit de montrer que $t \mapsto L(\varphi(t), \varphi'(t))$ est constante, autrement dit que sa dérivée est nulle sur l'intervalle J. Or $\forall t \in J$,

$$L(\varphi(t), \varphi'(t)) = \frac{1}{3} \varphi(t)^6 + \varphi'(t)^2$$

donc $(L(\varphi, \varphi'))'(t) = 2\varphi(t)^5 \varphi'(t) + 2\varphi''(t)\varphi'(t) = 2\varphi'(t)\underbrace{(\varphi''(t) + \varphi(t)^5)}_{=0}$

Ainsi $\boxed{(\varphi, \varphi')(J) \text{ est inclus dans une ligne de niveau de } L.}$

4. Les solutions de (E_2) sont globales

D'après les questions 2. et 3., $(\varphi, \varphi')(J)$ est inclus dans une partie bornée de $\mathbb{R}^2$: ainsi l'application $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}$ est bornée sur J et d'après le théorème d'explosion en temps fini (qui s'applique puisqu'on est dans le cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz) nécessairement $J = \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sont globales.}}$$

Exercice 3 : $y'' + \frac{1}{4t^2} y = \frac{1}{\sqrt{t}}$

1. Ecriture sous forme de système différentiel d'ordre 1

$$(E_3) \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{4t^2} y = \frac{1}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = y' \\ y'' = -\frac{1}{4t^2} y + \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4t^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{(E_3) \Leftrightarrow (\tilde{E}_3) : \; Y' = A(t)\, Y + B(t) \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \; A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4t^2} & 0 \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}}$

2. a) Résolution de l'équation homogène (E_3^H)

On commence par chercher les solutions de $(E_3^H) : y'' + \frac{1}{4t^2} y = 0$ sur $]0;+\infty[$ qui s'écrivent sous la forme $\varphi(t) = \sqrt{t}\,(\ln t)^k$ $(k \in \mathbb{N})$: φ est alors bien deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, et

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} (\ln t)^k + \sqrt{t} \times k (\ln t)^{k-1} \times \frac{1}{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} (\ln t)^k + \frac{k}{\sqrt{t}} (\ln t)^{k-1}$$

$$\varphi''(t) = \frac{-1}{4t\sqrt{t}} (\ln t)^k + \frac{1}{2\sqrt{t}} \times k (\ln t)^{k-1} \times \frac{1}{t} - \frac{k}{2t\sqrt{t}} (\ln t)^{k-1} + \frac{k}{\sqrt{t}} (k-1)(\ln t)^{k-2} \times \frac{1}{t}$$

$$= \frac{1}{t\sqrt{t}} \left(\frac{-(\ln t)^k}{4} + k(k-1)(\ln t)^{k-2} \right)$$

D'où $\varphi''(t) + \frac{1}{4t^2} \varphi(t) = \frac{1}{t\sqrt{t}} \left(\frac{-(\ln t)^k}{4} + k(k-1)(\ln t)^{k-2} \right) + \frac{1}{4t^2} \sqrt{t} (\ln t)^k$

$$= k(k-1) \frac{(\ln t)^{k-2}}{t\sqrt{t}}$$

$$= 0 \text{ sur }]0;+\infty[\text{ si et seulement si } k(k-1) = 0$$

ce qui fournit deux solutions de (E_3^H) : $t \xmapsto{\varphi} \sqrt{t}$ et $t \xmapsto{\psi} \sqrt{t} \ln t$.

Comme (E_3^H) est une équation linéaire homogène d'ordre 2, l'ensemble de ses solutions $\mathcal{S}_3^H$ est un espace vectoriel de dimension 2. Or on en a déjà trouvé deux éléments : φ et ψ, il reste à vérifier que φ et ψ sont linéairement

indépendantes pour obtenir une base de $\mathcal{S}_3^H$: or

si $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$ ie $\forall t > 0$, $\lambda\varphi(t) + \mu\psi(t) = 0$,

alors $\forall t > 0$ $\lambda\sqrt{t} + \mu\sqrt{t}\ln t = \sqrt{t}(\lambda + \mu\ln t) = 0$

et $\lambda + \mu\ln t = 0$: avec $t = 1$, on obtient $\lambda = 0$

d'où $\mu\ln t \equiv 0$ ie $\mu = 0$.

Ainsi (φ, ψ) est une base de $\mathcal{S}_3^H$, autrement dit toute solution de (E_3^H) s'écrit (de façon unique) comme combinaison linéaire de φ et ψ.

$$\boxed{\text{les solutions de } (E_3^H) \text{ sur }]0;+\infty[\text{ sont les } t \mapsto \lambda\sqrt{t} + \mu\sqrt{t}\ln t \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})}$$

2.b) Système fondamental de solutions

Par définition un système fondamental de solutions de (E_3^H) est une base de l'espace des solutions $\mathcal{S}_3^H$: vu 2.a), on a donc que

$$\boxed{\left(t \overset{\varphi}{\mapsto} \sqrt{t},\ t \overset{\psi}{\mapsto} \sqrt{t}\ln t\right) \text{ est un système fondamental de solutions de } (E_3^H) \text{ sur }]0;+\infty[.}$$

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi\\ \psi'\end{pmatrix}\right)$ est un système fondamental de solutions de $(\tilde{E}_3^H)$:

$$\boxed{\left(t \overset{\Phi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}\sqrt{t}\\ \frac{1}{2\sqrt{t}}\end{pmatrix},\ t \overset{\Psi}{\longmapsto} \begin{pmatrix}\sqrt{t}\ln t\\ \frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t + \frac{1}{\sqrt{t}}\end{pmatrix}\right) \text{ est un système fondamental de solutions de } Y' = A(t).Y \text{ sur }]0;+\infty[.}$$

3. Résolution de (E_3)

On va en fait commencer par résoudre $(\tilde{E}_3)$, en cherchant une solution particulière à l'aide de la méthode de variation des constantes :

soit $f(t) = \alpha(t)\,\Phi(t) + \beta(t)\,\Psi(t)$

alors f est solution de $(\tilde{E}_3) \iff \alpha'(t)\,\Phi(t) + \beta'(t)\,\Psi(t) + \alpha(t)\,\Phi'(t) + \beta(t)\,\Psi'(t)$

$$= A(t)\left(\alpha(t)\,\Phi(t) + \beta(t)\,\Psi(t)\right) + B(t)$$

$$\iff \alpha'(t)\,\Phi(t) + \beta'(t)\,\Psi(t) = B(t)$$

puisque Φ et Ψ sont solutions de $Y' = A(t).Y$

$$\iff \forall t > 0,\ \begin{cases} \alpha'(t)\sqrt{t} + \beta'(t)\sqrt{t}\ln t = 0 \\ \dfrac{\alpha'(t)}{2\sqrt{t}} + \beta'(t)\left(\dfrac{\ln t}{2\sqrt{t}} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$$

$$\iff \forall t > 0,\ \begin{cases} \alpha'(t) + \beta'(t)\ln t = 0 \\ \alpha'(t) + \beta'(t)\,(\ln t + 2) = 2 \end{cases}$$

$$\iff \forall t > 0,\ \begin{cases} \alpha'(t) = -\ln t \\ \beta'(t) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ /\ \begin{cases} \alpha(t) = -t\ln t + t + c_1 \\ \beta(t) = t + c_2 \end{cases}$$

Ainsi les solutions de $(\tilde{E}_3)$ sont les $t \mapsto (-t\ln t + t + c_1)\,\Phi(t) + (t + c_2)\,\Psi(t)$,

ce qui donne comme solutions de (E_3) :

$$t \mapsto \underbrace{(-t\ln t + t + c_1)\,\varphi(t) + (t + c_2)\,\psi(t)}_{\substack{= (-t\ln t + t + c_1)\sqrt{t} + (t + c_2)\sqrt{t}\ln t \\ = t\sqrt{t} + c_1\sqrt{t} + c_2\sqrt{t}\ln t}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ainsi les solutions de } (E_3) \text{ sont les} \\ \qquad t \mapsto t\sqrt{t} + c_1\sqrt{t} + c_2\sqrt{t}\ln t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \end{array}}$$

Exercice 4 : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x(1+y) \end{cases}$

1. Existence d'une unique solution maximale

Le système différentiel (S) s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x(1+y) \end{pmatrix}$

est une application de classe $\mathcal{C}^1$, a fortiori continue et localement lipschitzienne.

Ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre que :

$$\boxed{\text{pour toute condition initiale, il existe une unique solution maximale.}}$$

2. Points critiques et solutions particulières

- les points critiques sont donnés par $\begin{cases} 0 = -y \\ 0 = x(1+y) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Le système admet un seul point critique : } (0,0).}$$

- On cherche les solutions de la forme $t \mapsto (x(t), -1)$: une telle application (avec x de classe $\mathcal{C}^1$) est solution de (S) $\iff \begin{cases} x'(t) = 1 \\ 0 = x(t) \times 0 \end{cases} \iff x'(t) \equiv 1$

$$\boxed{\text{Ainsi les solutions de la forme } t \mapsto (x(t), -1) \text{ sont exactement les applications } t \mapsto (t+c, -1) \text{ sur } \mathbb{R} \quad (\text{où } c \in \mathbb{R}).}$$

3. Symétrie des trajectoires

- Si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est solution de (S) sur J, pour la condition initiale $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = y_0 < -1 \end{cases}$:

posons $\forall t \in -J$, $\psi(t) = (\underbrace{-\varphi_1(-t)}_{\psi_1(t)}, \underbrace{\varphi_2(-t)}_{\psi_2(t)})$ (qui est bien définie sur $-J$ puisque $t \in -J \iff -t \in J$).

Alors ψ est dérivable, et $\begin{cases} \psi_1'(t) = \varphi_1'(-t) = -\varphi_2(-t) = -\psi_2(t) \\ \psi_2'(t) = -\varphi_2'(-t) = -\varphi_1(-t)\left(1+\varphi_2(-t)\right) = \psi_1(t)(1+\psi_2(t)) \end{cases}$

donc <u>ψ est aussi solution de (S), sur l'intervalle $-J$.</u>

- <u>Montrons que φ et ψ coïncident sur l'intervalle $J \cap (-J)$:</u>

  les applications φ et ψ sont solutions du même système différentiel.

  De plus elles vérifient la même condition initiale en $0 \in J \cap (-J)$,

  puisque $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = y_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \psi_1(0) = -\varphi_1(-0) = -\varphi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = \varphi_2(-0) = \varphi_2(0) = y_0 \end{cases}$.

  L'unicité donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que

  $\varphi|_{J\cap(-J)} = \psi|_{J\cap(-J)}$.

- On en déduit que $J = -J$ (autrement dit l'intervalle J est symétrique par rapport à 0) : sinon, l'application $t \mapsto \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in J \\ \psi(t) & \text{si } t \in -J \end{cases}$, qui

  est bien définie (puisque φ et ψ coïncident sur $J \cap (-J)$) et solution de (S) sur l'intervalle $J \cup (-J)$, serait un prolongement strict à $J \cup (-J)$ de la solution maximale (φ, J) ce qui est impossible.

  <u>D'où $J = -J$</u>. Comme on sait que l'intervalle de définition d'une solution maximale est ouvert, cela signifie que

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} J =]-\alpha;\alpha[\quad \text{avec } \alpha > 0 \\ \text{ou } J =]-\infty;+\infty[\end{array}\right\} \text{ie } J =]-a;a[\quad (a \in]0;+\infty])}$$

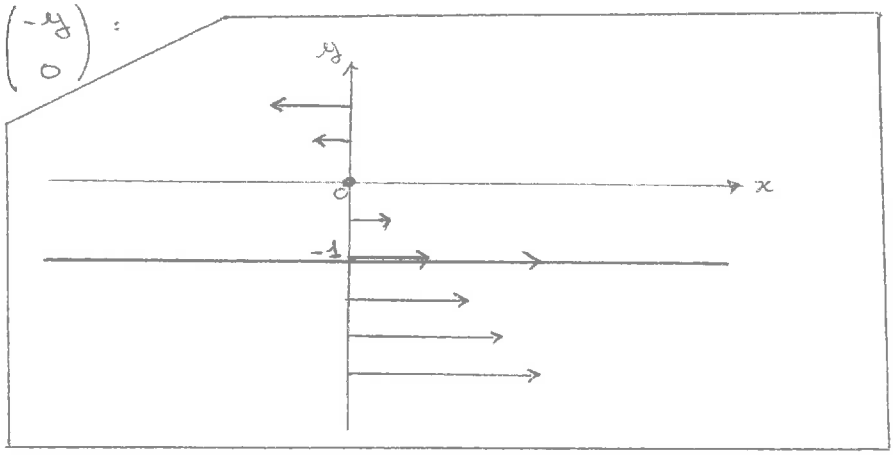
- De plus on a donc $\forall t \in]-a;a[$, $\psi(t) = \varphi(t)$ ie $\begin{cases} -\varphi_1(-t) = \varphi_1(t) \\ \varphi_2(-t) = \varphi_2(t) \end{cases}$

  ce qui signifie que $\boxed{\text{un point } (x,y) \text{ est sur la trajectoire de } \varphi \text{ si et seulement si } (-x,y) \text{ est aussi sur cette trajectoire.}}$

4.a) La trajectoire entre dans la zone $\mathcal{A}$

En un point de coordonnées $(0, y)$, le champ de vecteurs est donné par

$F\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\0\end{pmatrix}$:



On a supposé $\begin{cases}\varphi_1(0) = 0\\ \varphi_2(0) = y_0 < -1\end{cases}$, en particulier $\begin{cases}\varphi_1'(0) = -y_0 > 0\\ \varphi_2'(0) = 0\end{cases}$

Par continuité de φ_1' : $\exists\, \varepsilon_1 > 0 \mid \forall t \in [0; \varepsilon_1[,\ \varphi_1'(t) > 0$ et donc

φ_1 est strictement croissante sur $[0; \varepsilon_1[$. Comme $\varphi_1(0) = 0$, cela implique

que $\forall t \in]0; \varepsilon_1[,\ \varphi_1(t) > 0$.

De plus $\varphi_2(0) < -1$ donc par continuité de φ_2, $\exists\, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall t \in [0; \varepsilon_2[,\ \varphi_2(t) < -1$.

En posant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on a :

$$\boxed{\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0; \varepsilon[,\ \begin{cases}\varphi_1(t) > 0\\ \varphi_2(t) < -1\end{cases} \quad \text{donc } \varphi(t) \in \mathcal{A}.}$$

4.b) La trajectoire ne ressort pas de $\mathcal{A}$

Par l'absurde, si la trajectoire ressort de $\mathcal{A}$: puisque φ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que l'un des deux cas suivants se produit :

i) la trajectoire de φ coupe la droite $\{y = -1\}$

ii) la trajectoire de φ coupe la demi-droite $\{x = 0,\ y < -1\}$

- La situation i) est impossible car la droite $\{y = -1\}$ est une trajectoire de solution de (S) ; or l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz implique, comme il s'agit d'un système autonome, que deux trajectoires ne peuvent se couper.

• Pour ii) : supposons donc qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $\begin{cases} \varphi_1(t_1) = 0 \\ \varphi_2(t_1) < -1 \end{cases}$.

Alors le même raisonnement qu'en a) montre qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que :

$$\forall t \in]t_1 ; t_1 + \varepsilon'[, \begin{cases} \varphi_1(t) > 0 \\ \varphi_2(t) < -1 \end{cases}$$

et donc la trajectoire ne sort pas de la zone $\mathcal{A}$ à l'instant t_1.

Ainsi la trajectoire de φ ne peut sortir de $\mathcal{A}$ ni par la droite $\{y = -1\}$, ni par la demi-droite $\{x = 0, y < -1\}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall t \in \ ]0 ; a[, \varphi(t) \in \mathcal{A} \\ \\ \text{et donc } \begin{cases} \varphi_1'(t) = -\varphi_2(t) > 1 > 0 \\ \varphi_2'(t) = \underbrace{\varphi_1(t)}_{>0} \underbrace{(1 + \varphi_2(t))}_{<0} < 0 \end{cases} \end{array}}$$

5.a) Limite de $\varphi_1'(t)$

Par définition, $\ell_2 = \lim\limits_{t \to a^-} \varphi_2(t)$, or $\varphi_2(0) = y_0 < -1$ et φ_2 est (strictement) décroissante sur $[0 ; a[$ d'après la question précédente, donc $\boxed{\ell_2 < -1}$.

De plus vu (S) : $\varphi_1'(t) = -\varphi_2(t)$ d'où $\boxed{\varphi_1'(t) \xrightarrow[t \to a^-]{} -\ell_2}$.

5.b) Si $a \in \mathbb{R}$

• Comme φ_1' est continue sur $[0 ; a[$ et que $\varphi_1'(t) \xrightarrow[t \to a^-]{} -\ell_2$, on en déduit que

φ_1' se prolonge par continuité à $[0 ; a]$. Le prolongement obtenu sera une

fonction continue sur le compact $[0 ; a]$, donc bornée : a fortiori

$$\boxed{\text{si } \varphi_2(t) \xrightarrow[a^-]{} \ell_2 \text{ et si } a \in \mathbb{R}, \ \varphi_1' \text{ est bornée sur } [0 ; a[.}$$

• Notons $M := \sup\limits_{[0 ; a[} |\varphi_1'|$: d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall t \in [0 ; a[, \ |\varphi_1(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_1(0)| \leq M |t - 0| \leq Ma$$

donc $\boxed{\text{si } \varphi_2(t) \xrightarrow[a^-]{} \ell_2 \text{ et si } a \in \mathbb{R}, \ \varphi_1 \text{ est bornée sur } [0 ; a[.}$

• Ainsi φ_1 est bornée sur $[0;a[$. De plus, comme φ_2 est continue sur $[0;a[$ et a une limite finie en a^-, φ_2 est également bornée sur $[0;a[$. Par conséquent $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est bornée sur $[0;a[$.

D'après le théorème d'explosion en temps fini (qui s'applique puisqu'on est dans le cadre des hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz), on doit alors avoir $a = +\infty$. <u>contradiction</u>.

$$\boxed{\text{Donc si } \varphi_2(t) \text{ a une limite finie quand } t \to a^- : \text{ alors on ne peut } \underline{\text{pas}} \text{ avoir } a \in \mathbb{R}.}$$

<u>5.c) Si $a = +\infty$</u>

• D'après 5.a) :

$$\varphi_1'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell_2 > 1, \text{ ainsi } \exists t_0 \mid \forall t \geq t_0,\ \varphi_1'(t) \geq 1 \text{ , ce qui donne}$$

en intégrant : $\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1'(s)ds \geq \underbrace{\varphi_1(t_0) + (t-t_0)}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty} \quad \forall t \geq t_0$

donc si $\varphi_2(t) \xrightarrow[+\infty]{} \ell_2$, alors $\varphi_1(t) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

• Or $\varphi_2'(t) = \varphi_1(t)(1+\varphi_2(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$ car $1+\varphi_2(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1+\ell_2 < 0$:

en particulier $\exists t_1 \mid \forall t \geq t_1,\ \varphi_2'(t) \leq -1$, ce qui donne en intégrant :

$$\forall t \geq t_1,\quad \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1) + \int_{t_1}^{t} \varphi_2'(s)\,ds \leq \underbrace{\varphi_2(t_1) - (t-t_1)}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{donc si } \varphi_2(t) \xrightarrow[+\infty]{} \ell_2 \text{, alors } \varphi_2(t) \xrightarrow[+\infty]{} -\infty \ldots \text{ contradiction,} \\ \text{autrement dit si } \varphi_2(t) \text{ a une limite finie quand } t \to a^-\text{, alors} \\ \text{on ne peut } \underline{\text{pas}} \text{ avoir } a = +\infty.\end{array}}$$

5.d) Conclusion

On a ainsi montré que, si on suppose que $\varphi_2(t)$ a une limite finie quand $t \to a^-$, on obtient dans tous les cas ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$) une contradiction.

Par conséquent $\varphi_2(t)$ n'a pas de limite finie quand $t \to a^-$.

Comme on a vu dans 4) que $\varphi_2'(t) < 0$ sur $[0; a[$ et donc φ_2 est strictement décroissante sur $[0, a[$, la seule possibilité est que

$$\boxed{\varphi_2(t) \xrightarrow[t \to a^-]{} -\infty}$$

6.a) Si $a \in \mathbb{R}$

Par définition, $f(t) = \ln|1 + \varphi_2(t)| = \ln(-1 - \varphi_2(t))$ puisque $\forall t \in [0; a[, \varphi_2(t) < -1$

donc $\boxed{f'(t) = \dfrac{\varphi_2'(t)}{1 + \varphi_2(t)} = \varphi_1(t) \xrightarrow[t \to a^-]{} l_1 .}$

Par le même raisonnement qu'en 5.b), on en déduit que f' est bornée sur $[0; a[$, et comme $a \in \mathbb{R}$ que <u>f est bornée sur $[0; a[$</u>.

Or $f(t) = \ln|1 + \varphi_2(t)| \xrightarrow[t \to a^-]{} +\infty$ car d'après 5), on a $\varphi_2(t) \xrightarrow[t \to a^-]{} -\infty$,

d'où la contradiction : $\boxed{\text{si } \varphi_1(t) \text{ a une limite finie quand } t \to a^-, \text{ alors on ne peut } \underline{\text{pas}} \text{ avoir } a \in \mathbb{R}.}$

6.b) Si $a = +\infty$

Puisque $\varphi_1'(t) = -\varphi_2(t)$: d'après 5.d), $\boxed{\varphi_1'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty .}$

En particulier, $\exists\, t_0 \mid \forall t \geq t_0,\ \varphi_1'(t) \geq 1$ et donc $\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1'(s)\,ds$

$$\geq \varphi_1(t_0) + (t - t_0) \quad \forall t \geq t_0$$

ce qui force $\boxed{\varphi_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty}$. Or on a supposé que $\varphi_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} l_1 \in \mathbb{R}$: contradiction, autrement dit $\boxed{\text{si } \varphi_1(t) \text{ a une limite finie quand } t \to a^-, \text{ alors on ne peut } \underline{\text{pas}} \text{ avoir } a = +\infty.}$

6.c) Conclusion

Les questions 6.a) et 6.b) montrent que, si on suppose que $\varphi_1(t)$ a une limite finie quand $t \to a^-$, on obtient une contradiction. Cette hypothèse est donc absurde, d'où $\varphi_1(t)$ n'a pas de limite finie quand $t \to a^-$.

Mais comme d'après 4. on a $\varphi'_1(t) > 0$ sur $[0; a[$: φ_1 est strictement croissante sur $[0; a[$, d'où la seule possibilité est que $\boxed{\varphi_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty}$

7. Allure des trajectoires