Corrigé du DS2 (18 mai 2018)

Exercice 1 (cf TD) : $y'+y = \max(t,0)$ (E_1)

C'est une equation différentielle linéaire avec second membre.

- On commence donc par résoudre l'équation homogène associée (E_H) : $y'+y=0$:

  les solutions sont les $t \mapsto \lambda e^{-t}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

- Cherchons une solution particulière sur $]0;+\infty[$:

  sur cet intervalle, $(E_1) \Leftrightarrow y'+y = t$ et on remarque que $t \mapsto t-1$ est une solution évidente. Donc les solutions sont les $t \mapsto \lambda^+ e^{-t} + t - 1$ $(\lambda^+ \in \mathbb{R})$.

- Sur $]-\infty;0[$, $(E_1) \Leftrightarrow y'+y = 0$ qui est homogène, donc les solutions sont les $t \mapsto \lambda^- e^{-t}$ $(\lambda^- \in \mathbb{R})$.

- Pour résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$, il reste à voir si les solutions obtenues sur $]-\infty,0[$ et $]0;+\infty[$ peuvent se recoller en 0. Si φ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier solution sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ donc $\exists \lambda^+, \lambda^- \in \mathbb{R}$ /

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda^+ e^{-t} + t - 1 & \text{si } t > 0 \\ \lambda^- e^{-t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

et φ se prolonge par continuité en 0 $\Leftrightarrow \lambda^+ - 1 = \lambda^-$.

autrement dit $\varphi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-t} + t - 1 & \text{si } t \geq 0 \\ (\lambda-1)e^{-t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$ en notant $\lambda^+ =: \lambda$

Or $\varphi'(t) = \begin{cases} -\lambda e^{-t} + 1 & \text{si } t > 0 \text{ donc } \varphi'(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} -\lambda + 1 \\ (\lambda-1)e^{-t} & \text{si } t < 0 \text{ donc } \varphi'(t) \xrightarrow[t \to 0^-]{} -(\lambda-1) = -\lambda+1 \end{cases}$

donc φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour toute valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Enfin $\varphi'(0) + \varphi(0) = -\lambda + 1 + \lambda - 1 = 0 = \max(0,0)$ d'où (E_1) est vérifiée en 0.

$$\boxed{\text{les solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les } t \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-t} + t - 1 & \text{si } t \geq 0 \\ (\lambda-1)e^{-t} \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).}$$

Exercice 2 : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (E_2)$

1. Existence et unicité de φ et ψ

On peut réécrire (E) sous la forme suivante :

$$(E) \iff \begin{cases} y' = y' \\ y'' = -a(t)y' - b(t)y \end{cases} \iff Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} Y \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient $t \mapsto A(t)$ défini et continu sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : pour tout $Y_0 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale vérifiant $Y(0) = Y_0$. La première composante de Y est une solution de (E), la seconde est sa dérivée autrement dit $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $y(0) = c$, $y'(0) = d$.

De plus le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure que les solutions sont globales.

$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont bien définies et sont solutions sur } \mathbb{R}.}$

2. Montrons que (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (E).

Comme (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Pour montrer que la famille de solutions à 2 éléments (φ, ψ) est un système fondamental de solutions, il reste donc à montrer que φ et ψ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

Or si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lambda \varphi(t) + \mu \psi(t) = 0$:

alors $\begin{cases} \lambda \varphi(0) + \mu \psi(0) = 0 \text{ ie } \lambda = 0 \\ \text{en dérivant : } \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda \varphi'(t) + \mu \psi'(t) = 0 \text{ donc } \lambda \varphi'(0) + \mu \psi'(0) = 0 \\ \qquad \text{ie } \mu = 0 \end{cases}$

ainsi φ et ψ sont bien linéairement indépendantes, et

$\boxed{(\varphi, \psi) \text{ est un système fondamental de solutions de } (E).}$

Soit f la solution voulue : on sait que f est combinaison linéaire de φ et ψ,

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid f = \lambda \varphi + \mu \psi$. D'où

$$\begin{cases} c = f(0) = \lambda \varphi(0) + \mu \psi(0) = \lambda \\ d = f'(0) = \lambda \varphi'(0) + \mu \psi'(0) = \mu \end{cases}$$

et donc $\boxed{\text{la solution de } (E_2) \text{ vérifiant } \begin{cases} y(0) = c \\ y'(0) = d \end{cases} \text{ est exactement } c\varphi + d\psi.}$

3. Montrons que M est inversible

Puisque (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de (E) :

$$\det M = \begin{vmatrix} \varphi(T) & \psi(T) \\ \varphi'(T) & \psi'(T) \end{vmatrix} = W(T)$$ où W est le Wronskien associé au système fondamental de solutions (φ, ψ).

Puisque W ne s'annule pas, on a en particulier $\det M \neq 0$ et donc

$\boxed{M \text{ est inversible}}$

4. Etude de $t \mapsto h(t+T)$

- Si h est solution de (E) et $g(t) = h(t+T)$: alors g est deux fois dérivable puisque h l'est, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g''(t) + a(t) g'(t) + b(t) g(t) &= h''(t+T) + a(t) h'(t+T) + b(t) h(t+T) \\ &= h''(t+T) + a(t+T) h'(t+T) + b(t+T) h(t+T) \\ &\quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont } T\text{-périodiques} \\ &= 0 \quad \text{car } h \text{ est solution de } (E) \end{aligned}$$

donc $\boxed{g \text{ est aussi solution de } (E).}$

- Si $h = c\varphi + d\psi$:

alors $g(t) = h(t+T) = c\varphi(t+T) + d\psi(t+T)$ et donc $\begin{cases} g(0) = c\varphi(T) + d\psi(T) \\ g'(0) = c\varphi'(T) + d\psi'(T) \end{cases}$

De plus, comme g est solution de (E), on sait d'après 2) que

$g = C\varphi + D\psi$ où $C = g(0)$ et $D = g'(0)$.

En particulier $\begin{cases} C = \varphi(T) \times c + \psi(T) \times d \\ D = \varphi'(T) \times c + \psi'(T) \times d \end{cases}$ ie $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(T) & \psi(T) \\ \varphi'(T) & \psi'(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

Ainsi $\boxed{g = C\varphi + D\psi \text{ , où } \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.}$

5. Condition sur M pour que (E) admette une solution T-périodique non-triviale

- Supposons que $(c,d) \neq (0,0)$ et que $h = c\varphi + d\psi$ est T-périodique :

alors $h = g$ et par unicité de l'écriture dans la base (φ, ψ),

cela implique que $c = C$ et $d = D$, autrement dit $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est donc un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

- Réciproquement, si M admet 1 comme valeur propre :

$\exists \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ M \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ et ainsi 4) donne que, pour $h = c\varphi + d\psi$,

on a $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) = h(t)$ ie $h(t+T) = h(t)$, autrement dit h est T-périodique.

D'où $\boxed{\text{(E) admet une solution T-périodique non-triviale si et seulement si la matrice } M \text{ admet 1 comme valeur propre.}}$

Exercice 3 : $y' = \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ (E_3)

1. Existence et unicité des solutions maximales

- (E_3) est une équation différentielle d'ordre 1, et la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue et localement lipschitzienne sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$\boxed{\text{D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation } y' = F(t,y) = \sin\left(\frac{1}{y}\right) \text{ admet pour toute condition initiale } y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^* \text{ une unique solution maximale } (\varphi, J). \quad (J \text{ intervalle de } \mathbb{R} \text{ contenant } 0).}$$

- Montrons que $(-\varphi, J)$ est aussi solution :

Posons $\psi(t) = -\varphi(t)$ pour $t \in J$: ψ est autant dérivable que φ, et

$$\forall t \in J, \quad \psi'(t) = -\varphi'(t) = -\sin\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) = -\sin\left(\frac{1}{-\psi(t)}\right) = \sin\left(\frac{1}{\psi(t)}\right)$$

ainsi $\boxed{(-\varphi, J) \text{ est aussi solution de } (E_3).}$

2. Solutions stationnaires

La fonction constante égale à c est solution $\iff 0 = \sin\left(\frac{1}{c}\right)$

$\iff \frac{1}{c} \in \pi\mathbb{Z}$ (et même $\pi\mathbb{Z}^*$)

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}^* \,/\, c = \frac{1}{k\pi}$

donc $\boxed{\text{les solutions stationnaires de } (E_3) \text{ sont les } t \mapsto \frac{1}{k\pi} \text{ sur } \mathbb{R} \ (k \in \mathbb{Z}^*).}$

3. Cas où $y_0 > \frac{1}{\pi}$

- Montrons que la solution est globale :

$\forall t \in J, \ |\varphi'(t)| = \left|\sin\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)\right| \leq 1$ donc d'après l'inégalité des accroissements

finis on a : $\forall t, t' \in J, \ |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq |t - t'|$

Par l'absurde, si $b := \operatorname{Sup} J < +\infty$:

alors $|\varphi(t) - \varphi(t')| \leq |t - t'| \xrightarrow[t, t' \to b^-]{} 0$

donc d'après le critère de Cauchy, $\varphi(t)$ a une limite finie quand $t \to b^-$. Le lemme de prolongement aux bornes implique alors que φ se prolonge sur un intervalle $]b-\varepsilon ; b+\varepsilon[$ en une solution de (E_3), ce qui contredit la maximalité de (φ, J).

donc $b = +\infty$. De même, si $a := \operatorname{Inf} J > -\infty$, on obtient un prolongement de φ sur $]a-\varepsilon' ; a+\varepsilon'[$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{J = \mathbb{R}}$ c'est-à-dire que φ est une solution globale.

• <u>Tableau de variations de φ :</u>

Par hypothèse, $\varphi(0) = y_0 > \frac{1}{\pi}$. Or la fonction constante égale à $\frac{1}{\pi}$ est aussi solution de (E_3).

L'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz (cf 1)) implique donc que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \neq \frac{1}{\pi}$ (sinon, si $\exists t_0 \mid \varphi(t_0) = \frac{1}{\pi}$, alors φ et $t \mapsto \frac{1}{\pi}$ seraient deux solutions distinctes du même problème de Cauchy avec condition initiale $\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi}$). Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $\forall t, \varphi(t) > \frac{1}{\pi}$ (car $\varphi(0) > \frac{1}{\pi}$).

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \sin\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)$ où $\frac{1}{\varphi(t)} \in]0 ; \pi[$: d'où $\varphi'(t) > 0$

et donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

Puisque φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et minorée par $\frac{1}{\pi}$:

$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \ell \geq \frac{1}{\pi} \ \mid\ \varphi(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \ell$$

Montrons que $\ell = \frac{1}{\pi}$: en effet, puisque $\varphi(t) \xrightarrow[-\infty]{} \ell^{\neq 0}$, on a $\varphi'(t) = \sin\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) \xrightarrow[-\infty]{} \sin\left(\frac{1}{\ell}\right)$

Par l'absurde, si $\sin\left(\frac{1}{\ell}\right) =: \lambda \neq 0$: puisque $\frac{1}{\ell} > \frac{1}{\pi}$ dans ce cas, on a donc $\lambda > 0$ ce qui donne

$$\exists t_0 \mid \forall t \leq t_0,\ \varphi'(t) \geq \frac{\lambda}{2}$$

et donc en intégrant : $\forall t \leq t_0,\ \int_t^{t_0} \varphi'(s)\,ds \geq \int_t^{t_0} \frac{\lambda}{2}\,ds$

ie $\varphi(t_0) - \varphi(t) \geq \frac{\lambda}{2}(t_0 - t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} +\infty$ car $\frac{\lambda}{2} > 0$

donc $-\varphi(t) \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$ ie $\varphi(t) \xrightarrow[-\infty]{} -\infty$, absurde.

Ainsi $\sin\left(\frac{1}{\ell}\right) = \lambda = 0$ et comme $\ell \geq \frac{1}{\pi}$, cela implique $\ell = \frac{1}{\pi}$.

$$\boxed{\varphi(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \frac{1}{\pi} \quad \text{si } y_0 > \frac{1}{\pi}}$$

En $+\infty$: φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc ou bien $\varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$, ou bien $\exists \ell' \in \mathbb{R},\ \ell' > y_0 \mid \varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell'$. Montrons par l'absurde que le second cas est impossible : en effet, sinon, on a

$$\varphi'(t) \xrightarrow[+\infty]{} \sin\left(\frac{1}{\ell'}\right) =: \mu \quad \text{et } \ell' \geq y_0 > \frac{1}{\pi} \Rightarrow \mu > 0$$

donc $\exists t'_0 \mid \forall t \geq t'_0,\ \varphi'(t) \geq \frac{\mu}{2}$ et en intégrant :

$$\forall t \geq t'_0,\ \int_{t'_0}^{t} \varphi'(s)\,ds \geq \int_{t'_0}^{t} \frac{\mu}{2}\,ds$$

ie $\varphi(t) - \varphi(t'_0) \geq \frac{\mu}{2}(t - t'_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ car $\frac{\mu}{2} > 0$

donc $\boxed{\varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty \text{ si } y_0 > \frac{1}{\pi}}$.

4. Cas où $y_0 \in \left]0; \frac{1}{\pi}\right[$

- Montrons que la solution est globale :

  * 1er cas : si $\exists k \in \mathbb{N}^* \mid y_0 = \frac{1}{k\pi}$, alors φ est stationnaire en particulier globale.

* 2ème cas : sinon, $\exists! k \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{(k+1)\pi} < y_0 < \frac{1}{k\pi}$

Or les fonctions constantes égales à $\frac{1}{(k+1)\pi}$ et $\frac{1}{k\pi}$ sont solutions de (E_3) : d'après l'unicité donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le graphe de φ ne peut pas couper les graphes de ces solutions. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a donc $\forall t \in J,\ \varphi(t) \in \left]\frac{1}{(k+1)\pi} ; \frac{1}{k\pi}\right[$.

En particulier, $|\varphi|$ est bornée sur J.

D'après le théorème d'explosion en temps fini (qui s'applique dans le même cadre que le théorème de Cauchy-Lipschitz), nécessairement $J = \mathbb{R}$

Donc $\boxed{\text{dans tous les cas, la solution maximale est globale.}}$

- Montrons que φ est monotone :

D'après ce qu'on vient de faire, ou bien φ est constante, ou bien elle prend ses valeurs dans un intervalle de la forme $\left]\frac{1}{(k+1)\pi} ; \frac{1}{k\pi}\right[$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Dans le second cas, $\varphi'(t) = \sin\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)$ reste donc de signe constant égal à $(-1)^k$, donc

φ est monotone, plus précisément :

* constante si $y_0 = \frac{1}{k\pi}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$
* strictement croissante si $y_0 \in \left]\frac{1}{(k+1)\pi} ; \frac{1}{k\pi}\right[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ pair
* strictement décroissante si $y_0 \in \left]\frac{1}{(k+1)\pi} ; \frac{1}{k\pi}\right[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ impair

- Limites en $-\infty$ et $+\infty$

Si $y_0 = \frac{1}{k\pi}$, φ est constante et donc $\lim_{-\infty} \varphi(t) = \lim_{+\infty} \varphi(t) = y_0$.

Sinon, si $y_0 \in \left]\frac{1}{(k+1)\pi} ; \frac{1}{k\pi}\right[$: φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, et reste bornée entre $\frac{1}{(k+1)\pi}$ et $\frac{1}{k\pi}$. Par conséquent elle admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$: $l^- := \lim_{-\infty} \varphi(t)$ et $l^+ := \lim_{+\infty} \varphi(t)$.

Il reste à calculer ℓ^- et ℓ^+ :

- $\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell^+ \neq 0$, donc $\varphi'(t) = \sin\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sin\left(\frac{1}{\ell^+}\right) =: \lambda$

  Comme dans la question 3), on a alors que

  * si $\lambda > 0$, $\varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ absurde
  * si $\lambda < 0$, $\varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$ absurde

  et donc nécessairement $\lambda = 0$ ie $\frac{1}{\ell^+} \in \pi\mathbb{Z}$.

- de même en $-\infty$: $\varphi'(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \sin\left(\frac{1}{\ell^-}\right)$ et on en déduit que

  φ est non bornée si $\sin\left(\frac{1}{\ell^-}\right) \neq 0$, ce qui est absurde ; d'où

  $\sin\left(\frac{1}{\ell^-}\right) = 0$ ie $\frac{1}{\ell^-} \in \pi\mathbb{Z}$.

Comme on sait que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \in \left]\frac{1}{(k+1)\pi} ; \frac{1}{k\pi}\right[$, il y a deux cas de figure :

* si k est pair : φ est strictement croissante, donc $\frac{1}{(k+1)\pi} \leq \ell^- < \ell^+ \leq \frac{1}{k\pi}$

  d'où $\ell^- = \frac{1}{(k+1)\pi}$ et $\ell^+ = \frac{1}{k\pi}$.

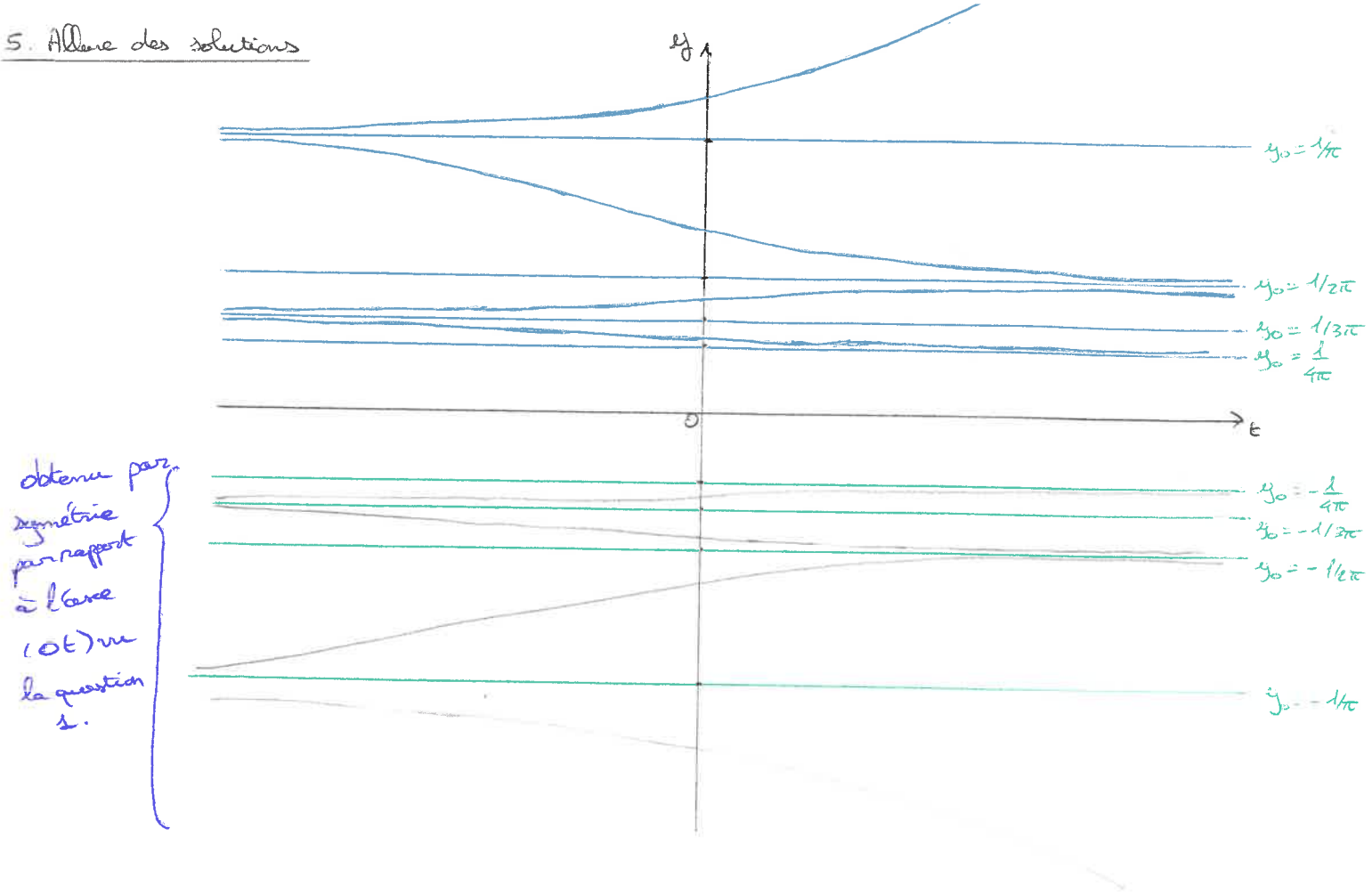
* si k est impair : φ est strictement décroissante, donc $\frac{1}{(k+1)\pi} \leq \ell^+ < \ell^- \leq \frac{1}{k\pi}$

  et $\ell^- = \frac{1}{k\pi}$, $\ell^+ = \frac{1}{(k+1)\pi}$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\bullet \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}^* \mid y_0 = \frac{1}{k\pi}, \quad \lim_{-\infty} \varphi(t) = \lim_{+\infty} \varphi(t) = \frac{1}{k\pi} \\
\bullet \text{ sinon, } \exists! \, k \in \mathbb{N}^* \mid y_0 \in \left]\frac{1}{(k+1)\pi} ; \frac{1}{k\pi}\right[: \text{ alors} \\
\qquad * \text{ si } k \text{ est pair, } \varphi(t) \xrightarrow[-\infty]{} \frac{1}{(k+1)\pi} \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{k\pi} \\
\qquad * \text{ si } k \text{ est impair, } \varphi(t) \xrightarrow[-\infty]{} \frac{1}{k\pi} \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{(k+1)\pi}
\end{array}}$$

5. Allure des solutions



Exercice 4 : $(S)\begin{cases} x' = x + \sin(3x - y) \\ y' = e^x - 1 \end{cases}$

1. Existence et unicité de la solution

$$(E_4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + \sin(3x - y) \\ e^x - 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il s'agit d'une équation différentielle autonome d'ordre 1. Comme la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, a fortiori continue et localement lipschitzienne, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre que $\boxed{\text{pour tout } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \text{ il existe une unique solution maximale vérifiant la condition initiale } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.}$

2.a) Majoration de $|\varphi_1(t) - \varphi(0)|$

Pour tout $t \in]T_*; T^*[$, on a $\varphi_1(t) - \varphi_1(0) = \int_0^t \varphi_1'(s)\,ds$

et si de plus $t \geq 0$: $|\varphi_1(t) - \varphi_1(0)| = \left| \int_0^t \varphi_1'(s)\,ds \right| \leq \left| \int_0^t |\varphi_1'(s)|\,ds \right| = \int_0^t |\varphi_1'(s)|\,ds$

or puisque $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est solution de (E_4), $\varphi_1' = \varphi_1 + \sin(3\varphi_1 - \varphi_2)$

et donc $|\varphi_1'| \leq |\varphi_1| + |\sin(3\varphi_1 - \varphi_2)| \leq |\varphi_1| + 1$.

Ainsi $\boxed{\forall t \in [0; T^*[, \quad |\varphi_1(t) - \varphi_1(0)| \leq \int_0^t (|\varphi_1(s)| + 1)\,ds}$

On en déduit que $|\varphi_1(t)| \leq |\varphi_1(t) - \varphi_1(0)| + |\varphi_1(0)|$

$$\leq \int_0^t (|\varphi_1(s)| + 1)\,ds + |x_0|$$

et donc $\boxed{\forall t \in [0; T^*[, \quad |\varphi_1(t)| + 1 \leq |x_0| + 1 + \int_0^t (|\varphi_1(s)| + 1)\,ds}$

2.b) Majoration de $|\varphi_1(t)|$

On cherche à appliquer le lemme de Gronwall :

pour cela on pose $\begin{cases} f(t) = |\varphi_1(t)| + 1 \\ k(t) = 1 \\ M = |x_0| + 1 \quad \text{constante} \end{cases}$ où f et k sont des fonctions continues sur $[0; T^*[$, avec k à valeurs positives.

Ainsi le lemme de Gronwall s'applique et donne :

$$\forall t \in [0; T^*[, \quad f(t) \leq M e^{\int_0^t k(s)\,ds}$$

c'est-à-dire $|\varphi_1(t)| + 1 \leq (|x_0| + 1) e^t$

et donc en particulier $\forall t \in [0; T^*[, \ |\varphi_1(t)| \leq (|x_0| + 1) e^t$.

2.c) Montrons que $T^* = +\infty$

- Supposons que $T^* < +\infty$:

alors d'après 2.b), $\forall t \in [0; T^*[, \ |\varphi_1(t)| \leq (|x_0| + 1) e^t \leq (|x_0| + 1) e^{T^*}$

donc φ_1 est bornée sur $[0; T^*[$.

De plus $\varphi_2'(t) = e^{\varphi_1(t)} - 1$, donc pour $t \in [0; T^*[$, comme l'exponentielle est $\nearrow$:

$$|\varphi_2'(t)| \leq e^{\varphi_1(t)} + 1 \leq e^{|\varphi_1(t)|} + 1 \leq e^{(|x_0|+1)e^{T^*}} + 1 =: M$$

d'où $|\varphi_2(t)| = \left| \varphi_2(0) + \int_0^t \varphi_2'(s)\,ds \right| \leq |y_0| + \int_0^t |\varphi_2'(s)|\,ds \leq |y_0| + Mt \leq |y_0| + M \times T^*$

et donc φ_2 est aussi bornée sur $[0; T^*[$.

- On en déduit une contradiction :

En effet, le théorème d'explosion en temps fini s'applique (puisqu'on est dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz) et montre que, si $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est bornée sur $[0; T^*[$, nécessairement $T^* = +\infty$ d'où la contradiction.

Finalement on a donc $\boxed{T^* = +\infty}$.

3. Points d'équilibre

Il s'agit de résoudre $\begin{cases} 0 = x + \sin(3x - y) \\ 0 = e^x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(-y) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$

donc $\boxed{\text{les points critiques sont les } \underset{a_k}{\underset{\shortparallel}{(0}}, \underbrace{k\pi}_{=b_k}) \quad (k \in \mathbb{Z}).}$

4a) Matrice jacobienne

En posant $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \sin(3x - y) \\ e^x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$, on a :

$$\boxed{J(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3\cos(3x - y) & -\cos(3x - y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}}$$

et $A_k = J(a_k, b_k) = J(0, k\pi)$ d'après 3.

$$= \begin{pmatrix} 1 + 3\cos(-k\pi) & -\cos(-k\pi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 3\cos(k\pi) & -\cos(k\pi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\boxed{A_k = \begin{pmatrix} 1 + 3(-1)^k & -(-1)^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

4.b) Si k est pair

Pour obtenir le fait que les valeurs propres sont réelles, et leur signe, on calcule le polynôme caractéristique de A_k :

$$\chi_{A_k}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A_k)\lambda + \det(A_k)$$
$$= \lambda^2 - (1 + 3(-1)^k)\lambda + (-1)^k$$

- son discriminant vaut $\left(-(1 + 3(-1)^k)\right)^2 - 4 \times (-1)^k = 10 + 2(-1)^k = 12 > 0$

donc χ_{A_k} possède deux racines réelles λ_1 et λ_2, distinctes.

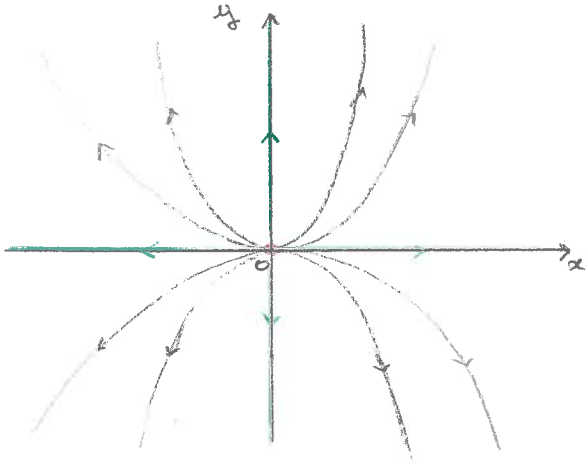
- d'après les relations coefficients - racines, on a alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = Tr(A_k) = 1 + 3(-1)^k = 4 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det(A_k) = (-1)^k = 1 \end{cases}$$ d'où λ_1 et λ_2 sont de même signe

et comme $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, cela implique que λ_1 et λ_2 sont positives.

> Si k est pair, A_k possède deux valeurs propres réelles distinctes de même signe (positif).

- on en déduit que dans ce cas, le point critique (a_k, b_k) est un noeud propre :



portrait de phase du système linéarisé $X' = A_k X$ dans une base propre de la matrice A_k

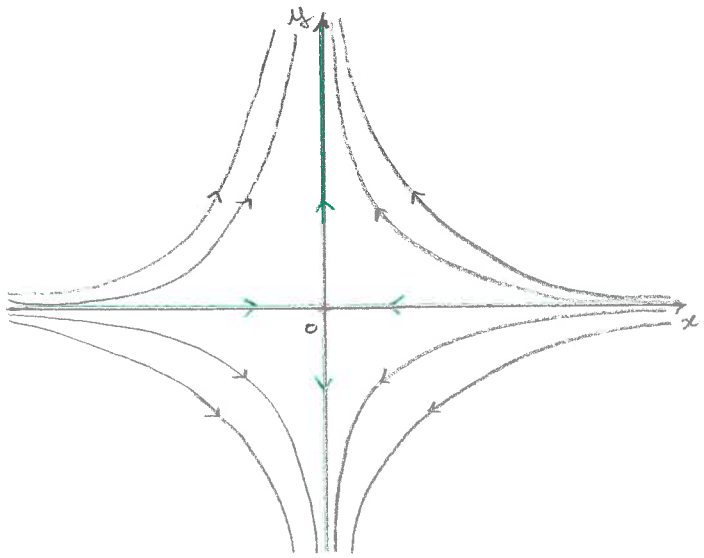
(l'axe (Ox) est la direction propre correspondant à la valeur propre de plus petit module, l'axe (Oy) est la direction propre correspondant la valeur propre de plus grand module ; le sens des flèches vient du fait que λ_1 et $\lambda_2 > 0$).

4.c) Si k est impair

- De même qu'en 4.b), on obtient que le discriminant du polynôme caractéristique de A_k vaut $10 + 2(-1)^k = 8 > 0$, donc χ_{A_k} possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, et par ailleurs $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 3(-1)^k = -2 \\ \lambda_1 \lambda_2 = (-1)^k = -1 \end{cases}$ d'où λ_1 et λ_2 sont de signes opposés.

> Si k est impair, A_k possède deux valeurs propres réelles distinctes de signes opposés.

• on en déduit que dans ce cas, le point critique (a_k, b_k) est un point selle :



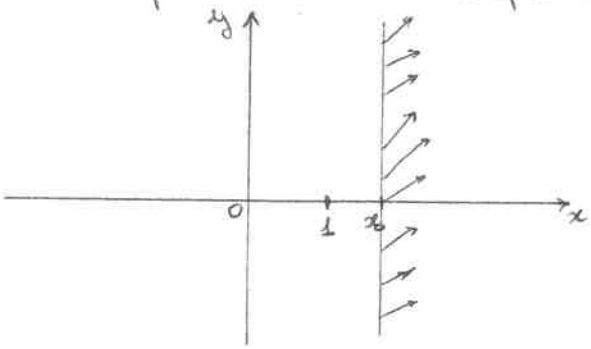
portrait de phase du système linéarisé $X' = A_k X$ dans une base propre de la matrice A_k

(ici l'axe (Ox) correspond à la direction propre pour la valeur propre négative et l'axe (Oy) à la direction propre pour la valeur propre positive, d'où le sens des flèches de parcours des trajectoires).

5.a) Champ de vecteurs sur $\{x = x_0\}$

Sur l'axe $x = x_0$, le champ de vecteurs est donné par $\begin{pmatrix} x_0 + \sin(3x_0 - y) \\ e^{x_0} - 1 \end{pmatrix}$

et comme $x_0 > 1$, $\begin{cases} \text{sa composante horizontale vérifie } x_0 + \sin(3x_0 - y) \geq x_0 - 1 > 0 \\ \text{sa composante verticale vérifie } e^{x_0} - 1 \geq e - 1 > 0 \end{cases}$



5.b) La trajectoire entre dans la zone $\{x > x_0\}$

On a $\begin{cases} \varphi_1(0) = x_0 > 1 \\ \varphi_2(0) = y_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi_1'(0) = x_0 + \sin(3x_0 - y_0) \geq x_0 - 1 > 0 \\ \varphi_2'(0) = e^{x_0} - 1 \end{cases}$

Par continuité de la fonction φ_1', $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall t \in [0; \varepsilon[, \ \varphi_1'(t) > 0$ et donc la fonction $t \mapsto \varphi_1(t)$ est strictement croissante sur $[0; \varepsilon[$. En particulier

$$\boxed{\forall t \in]0; \varepsilon[, \ \varphi_1(t) > \varphi_1(0) = x_0}$$

5.c) Minoration de φ_1'

D'après 5.b), pour $t \in]0;\varepsilon[$, on a $\varphi_1(t) > x_0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1 \geq \varepsilon$ tel que $\varphi_1(t_1) < x_0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme φ_1 est une fonction continue, il existe alors t_1' tel que $\varphi_1(t_1') = x_0$ (et nécessairement $t_1' \geq \varepsilon$). Ainsi l'ensemble

$$\Lambda := \{ t \geq \varepsilon \mid \varphi_1(t) = x_0 \}$$

est non vide, fermé car $\Lambda = \varphi_1^{-1}(\{x_0\})$ est la préimage d'un fermé par une application continue, et minoré (par ε). Ainsi Λ admet un plus petit élément

$t_0 := \min \Lambda$ qui est le premier instant ($\geq \varepsilon$) où la trajectoire touche l'axe $\{x = x_0\}$.

Le même raisonnement que celui fait en 5b) montre que $\exists \varepsilon_0 > 0 \,/\, \forall t \in]t_0; t_0+\varepsilon_0[,\ \varphi_1(t) > x_0$: la trajectoire rentre dans la zone $\{x > x_0\}$. Cela montre que la trajectoire ne peut pas sortir de la zone $\{x \geq x_0\}$.

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ \varphi_1(t) \geq x_0 \quad \text{et donc} \quad \varphi_1'(t) = \varphi_1(t) + \sin(3\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \geq x_0 - 1 > 0}$$

5.d) Limites en $+\infty$

D'après 5.c), $\forall t \geq 0$, $\varphi_1'(t) \geq x_0 - 1$ donc $\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \int_0^t \varphi_1'(s)\,ds \geq \underbrace{x_0 + (x_0-1)t}_{\xrightarrow[+\infty]{} +\infty \text{ car } x_0 - 1 > 0}$

et de plus $\varphi_2(t) = e^{\varphi_1(t)} - 1 \geq e^{x_0 + (x_0-1)t} - 1 \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

D'où $\boxed{\varphi_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty}$