Université de Lille 1
U.F.R. de Mathématiques

L2 - M33
Liste du 5 septembre 2017

Exercice 1. Déterminer explicitement les sous-ensembles A et B de $\mathbf{R}$ donnés par :
$A = \{x \in [0,1] : \exists n \in \mathbf{N}^* : \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$,
$B = \{x \in [0,1] : \forall n \in \mathbf{N}^* : \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$.

Déterminer les bornes inférieure et supérieure des ensembles $C = \{\frac{3n^2+4}{n^2+1} : n \in \mathbf{N}\}$ et $D = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $E_n = \{k + \frac{n}{k} : k \in \mathbf{N}^*\}$.

a. Montrer que E_n a une borne inférieure et que $\inf E_n = \inf\{k + \frac{n}{k} : 1 \leq k \leq n\}$.

b. Montrer que l'on a toujours $\inf E_n \geq 2\sqrt{n}$. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 3.
a. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$. Montrer que les termes u_n sont tous rationnels et que la suite converge vers $\sqrt{2}$.
b. On considère $A = \{x \in \mathbf{Q} : x \geq 0 \text{ et } x^2 \geq 2\}$. Montrer que A, vu comme sous-ensemble de $\mathbf{R}$, a une borne inférieure que l'on déterminera. Montrer que A vu comme sous-ensemble de $\mathbf{Q}$, n'a pas de borne inférieure.

Exercice 4. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad v_n = n^4\left(\sqrt[3]{n^6+n^3+1} - n^2 - \frac{1}{3n}\right), \quad w_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On pose

$$u_n^* = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

a. Soit $l \in \mathbf{R}$. Établir le *théorème de convergence en moyenne de Cesaro* :

$$(C) \qquad (\lim_{n\to\infty} u_n = l) \Longrightarrow (\lim_{n\to\infty} u_n^* = l).$$

À l'aide d'un contre-exemple, montrer que l'implication réciproque est généralement fausse.

b. Montrer que l'implication (C) reste vraie pour les limites infinies. En déduire que l'implication réciproque est vraie si l'on suppose en plus que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

c. On pose $x_0 = u_0$ et $x_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Montrer que

$$u_n^* = u_n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} kx_k$$

et en déduire que l'implication réciproque de (C) est vraie si l'on suppose en plus que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie la condition $\lim_{n\to\infty} n(u_n - u_{n-1}) = 0$.

6. Pour tout $n \geq 1$, on pose $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. En considérant $U_{2n} - U_n$, montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy. Montrer que $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$.

7. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On suppose qu'il existe une constante k, avec $0 \leq k < 1$, telle que l'on ait $|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$ pour tout $n \geq 1$.

a. Montrer que l'on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$ pour tout $n \geq 1$.

b. Montrer que si p et q sont deux entiers naturels avec $p > q$, on a

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

8. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifiez) :

a. Si la suite $(u_n + v_n)$ converge vers une limite finie, alors l'une au moins des suites (u_n) ou (v_n) converge vers une limite finie.
b. Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite $(u_n + \frac{1}{n})$ est aussi croissante.
c. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors (u_n) converge vers l.
d. Si la suite (u_n) ne converge pas vers une limite finie, alors elle n'est pas bornée.
e. Si la suite (nu_n) est bornée, alors la suite (u_n) converge.
f. Une suite convergente d'entiers est stationnaire à partir d'un certain rang.
i. De toute suite telle que $\sup\{u_n : n \geq 0\} = +\infty$, on peut extraire une sous-suite strictement croissante.
j. Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
k. Si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors (u_n) a une limite finie.
l. Si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.
m. Si (u_n) est positive et bornée et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n v_n = +\infty$.
n. La somme de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy.
o. Si une suite de rationnels est de Cauchy, sa limite est rationnelle.