3 - CONTINUITE

Quizz

Exercice 1 – Exemples de fonctions continues
Montrer que les applications suivantes sont continues :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad ; \quad h : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$$

Exercice 2 – Propriétés utiles
Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-on dire topologiquement des parties suivantes de X :

$$\{x/\ f(x) = 0\} \quad , \quad \{x/\ f(x) \geq 0\} \quad , \quad \{x/\ f(x) \leq 0\}$$

$$\{x/\ f(x) \neq 0\} \quad , \quad \{x/\ f(x) > 0\} \quad , \quad \{x/\ f(x) < 0\}$$

Montrer que $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2/\ 1 < a^2 + b^2 < 2\}$ et $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2/\ ab > 0\}$ sont des ouverts du plan euclidien.

Exercice 3 – Applications lipschitziennes

a) Soit $E = \mathcal{C}([0;1])$ muni de N_1. Vérifier que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$ est 1-lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$. Est-elle linéaire ?

b) Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une isométrie, *ie* : $\forall x, y \in E,\ d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y)$. Montrer qu'alors f est un homéomorphisme sur son image. Est-elle nécessairement surjective ?

Pour s'entraîner

Exercice 4
Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ xy = 1\}$: montrer que F est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Que représente F géométriquement ? Vérifier que sa projection sur l'axe des abscisses n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 5
Soit E l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de N_∞. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note T_a l'application qui à $f \in E$ associe $T_a(f) : x \mapsto f(a + x)$. Montrer que T_a est une application continue de E dans E.

Exercice 6
Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère $\Gamma = \{(x, \sin(1/x))/\ x > 0\}$. Déterminer $\overline{\Gamma}$.

Exercice 7
Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer que si $A \subset E$, la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

b) Soit A et B des fermés disjoints de E : montrer que

$$U = \{x \in E/\ d(x, A) < d(x, B)\} \text{ et } V = \{x \in E/\ d(x, A) > d(x, B)\}$$

sont deux ouverts disjoints contenant respectivement A et B.

Exercice 8
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $A = \{\cos(k\theta)/\ k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1; 1]$ et que $B = \{e^{ik\theta}/\ k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle unité (utiliser la densité du sous-groupe $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 9
Montrer que les opérateurs suivants sont continus et calculer leur norme :

a) sur $\mathbb{R}^n$ muni de N_∞ puis N_2, l'endomorphisme u représenté dans la base canonique par la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$;

b) sur $(\mathbb{R}^2, N_2)$, l'endomorphisme $u : (x_1, x_2) \mapsto (2x_1, x_2)$ et son inverse u^{-1} ;

c) sur (ℓ^∞, N_∞), l'endomorphisme $S : (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots)$ (appelé *schift*) ;

d) sur $E = \mathcal{C}([0; 1])$ muni de N_∞, l'endomorphisme $T : f \mapsto f \times g$ où $g \in E$ est fixé.

Les essentiels

Exercice 10
On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de N_∞ (ou d'une norme équivalente). Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert, et que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 11
Soit d et d' deux distances sur un ensemble E : montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité $\text{id} : (E, d) \to (E, d')$ est un homéomorphisme.

Exercice 12
Le but est de montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de N_∞ (ou d'une norme équivalente).

a) Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $T_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{k} \end{pmatrix}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T_k \to T$ et que les matrices T_k sont diagonalisables pour k assez grand (rappelons qu'une condition *suffisante* pour être dans $D_n(\mathbb{C})$ est d'avoir n valeurs propres distinctes).

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: expliquer pourquoi il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. Montrer que l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que $PT_kP^{-1} \to A$.

c) Conclure.

Exercice 13
Le théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

a) Traduire ce résultat en terme de densité.

b) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, vérifiant $\int_a^b f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'alors $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $g \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$. En déduire que $f = 0$.

Exercice 14
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on pose $\|P\| = \mathrm{Max}\{|a_k|/\ 0 \leq k \leq n\}$ et

$$u(P)(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} a_k X^k \qquad , \qquad v(P)(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$$

Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur E et que $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Les applications linéaires u et v sont-elles continues sur $(E, \|.\|)$?

Pour aller plus loin

Exercice 15 – Hyperplans dans un evn
Soit E un $\mathbb{K}$-evn. On rappelle qu'un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle (ou, de façon équivalente, un sev de E de codimension 1).

a) Soit φ une forme linéaire non continue sur E : construire une suite $(y_n)_n$ de E qui converge vers 0 et telle que $\forall n,\ \varphi(y_n) = 1$. Si $x \in E$ est fixé, que peut-on dire de la suite $x_n = x - \varphi(x)y_n$?

b) En déduire qu'un hyperplan $H = \mathrm{Ker}\varphi$ de E est ou bien fermé dans E (lorsque φ est continue) ou bien dense dans E (lorsque φ est non continue).

c) Application : soit $E = \mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$. Montrer que F est fermé dans (E, N_∞) mais dense dans (E, N_1).

Exercice 16 – Limite d'une suite vue comme limite d'une fonction
Soit Y un espace topologique et (u_n) une suite d'éléments de Y : on peut voir cette suite comme une application $u : \mathbb{N} \to Y$, définie par $u(n) = u_n$.

(a) Montrer que $u : \mathbb{N} \to Y$ est automatiquement continue.

(b) On pose $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On munit X de la topologie suivante : les ouverts non vides de X sont les réunions de parties finies de $\mathbb{N}$ et de parties de la forme $\{n \geq N\} \cup \{+\infty\}$. Vérifier que c'est bien une topologie sur X, et qu'elle induit sur $\mathbb{N}$ la topologie discrète.

(c) Montrer que $\overline{\mathbb{N}} = X$.

(d) Soit $l \in Y$: montrer que la suite (u_n) converge vers l si et seulement si la fonction $u : \mathbb{N} \to Y$ a pour limite l en $+\infty \in \overline{\mathbb{N}}$.