**Exercice 1. Topologie de Zariski**

1. Soit $k$ un corps algébriquement clos et $n$ un entier strictement positif. Pour tout $E \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ on note
$$Z(E) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \ ; \ P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \, \forall P \in E\}.$$
Montrer que l'ensemble des complémentaires de $Z(E)$, $E \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ est une topologie sur $k^n$. Montrer que tous les ouverts non-vides de cette topologie sont denses. Cette topologie est-elle séparée ?
2. Soit $A$ un anneau commutatif unitaire. On note $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble des idéaux premiers de $A$. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $A$ on vote $V(\mathfrak{a})$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$. Montrer que les complémentaires des $V(\mathfrak{a})$ forment une topologie sur $\operatorname{Spec} A$. Montrer que $\{(0)\}$ est un ouvert dense de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

**Exercice 2. Topologie $p$-adique** On dit qu'une norme sur un corps est ultramétrique si elle vérifie $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

1. Sur $\mathbb{Q}$ on définit la norme $p$-adique pour $p$ un entier premier par $|p^v \frac{a}{b}|_p = p^{-v}$ si $p \nmid ab$. Montrer qu'il s'agit d'une norme ultramétrique.
2. Montrer que, sur un corps muni d'une norme ultramétrique complète, une série converge si et seulement si son terme général tend vers 0.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ pour la topologie 2-adique sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 3.** Soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces vectoriels normés.

1. La topologie produit sur $E_1 \times E_2$ est-elle normée ? Si oui donner une (des) normes définissant cette topologie.
2. Soit $F$ un troisième espace vectoriel normé. Soit $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. À quelle condition $f$ est-elle continue ?
3. Montrer que les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont continues de $E_1 \times E_1$, resp. $\mathbb{R} \times E_1$, dans $E_1$.
4. Montrer que la topologie produit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est la topologie de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance induite par la norme $|(x, y)|_\infty = \sup\{|x|, |y|\}$.

**Exercice 4.** Soit $(X, d)$ un espace métrique.
**1)** Montrer que tout ouvert de $X$ est réunion dénombrable de fermés.
**2)** Soient $A, B \subset X$ deux fermés disjoints non vides de $X$. Prouver qu'il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

**Exercice 5.** Soit $A$ une partie d'un espace topologique séparable $X$. L'espace topologique $A$ (avec la topologie induite) est-il séparable ? Que se passe-t-il si on suppose que $X$ est métrique ?

**Exercice 6.** $(\star)$
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ; on pose $||A|| = \sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

**1.** Montrer que $||\cdot||$ est une norme qui définit la topologie usuelle de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (en identifiant $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{m\times n}$), qui est égale à la norme $||\cdot||_1$ ou à la norme $||\cdot||_\infty$ selon que $m = 1$ ou $n = 1$.

**2.** Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, montrer que l'on a $||AB|| \leq ||A||\,||B||$.

**3.** Dans cette question, $X$ désignera une matrice colonne de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

**a)** Montrer que l'on a $||AX||_\infty \leq ||A||\,||X||_\infty$ pour tout $A$ dans $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et tout $X$ dans $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

**b)** Trouver un vecteur $X_0$ non-nul vérifiant $||AX_0||_\infty = ||A||\,||X_0||_\infty$.

**c)** En déduire que l'on a l'égalité $||A|| = \sup_{X\neq 0} \dfrac{||AX||_\infty}{||X||_\infty}$.

**4.** Si $N$ est une norme sur $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que l'on ait $N(AB) \leq aN(A)N(B)$ pour tout $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

**Exercice 7.** Soit $X$ un espace topologique. On dit qu'une application $f : X \to \mathbb{R}$ présente un minimum local en un point $a \in X$ s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x$ dans $V$. Un minimum local est dit strict si $f(a) < f(x)$ pour tout $x$ dans $V - \{a\}$. On suppose que la topologie de $X$ admet une base dénombrable.

**1.** Montrer que l'ensemble $A$ des points $a \in X$ où $f$ présente un minimum local strict est dénombrable.

**2.** Soit $B$ l'ensemble des points $a \in X$ où $f$ présente un minimum local, montrer que $f(B)$ est dénombrable.

**Exercice 8.** Soit $E$ et $F$ deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue surjective. Montrer que l'image d'une partie dense de $E$ est dense dans $F$.

**Exercice 9.** Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (*i.e.* $\mathbb{R}$ quotienté par la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$), muni de la topologie quotient issu de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, est homéomorphe à $S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$, muni de la topologie induite par l'inclusion $S^1 \subset \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est muni de la topologie usuelle.

**N.B. : faites cet exercice sans compacité, i.e. sans utiliser qu'une bijection continue d'un espace compact dans un espace quelconque est un homéomorphisme.**

**Exercice 10. – Graphe et continuité**
**1)** Soit $E$ un espace topologique. On définit la diagonale $\Delta = \{(x, x)|x \in E\}$ de $E \times E$. Prouver que $E$ est séparé si et seulement si $\Delta$ est fermé dans $E \times E$.
**2)** Soit $E$ et $F$ deux espaces topologiques ($F$ séparé), $f : E \to F$ et son graphe $\Gamma = \{(x, f(x))|x \in E\} \subset E \times F$. Montrer que, si $f$ est continue, alors $\Gamma$ est fermé dans $E \times F$ (et la réciproque ?).

**Exercice 11. – Espace quotient**
*Rappel :* Soit $\Gamma \subset X \times X$. On note $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \Gamma$. L'ensemble $\Gamma$ est alors le graphe de la relation $\mathcal{R}$. On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* sur $X$ si
$(i)\forall(x, y) \in X^2,\ [x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x]$ (relation symétrique)
$(ii)\forall x \in X,\ x\mathcal{R}x$ (relation reflexive)
$(iii)\forall(x, y, z) \in X^3,\ [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (relation transitive)

Pour tout $x \in X$, on appelle *classe d'équivalence* de $x$, modulo $\mathcal{R}$, l'ensemble $\overline{x} = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}$. L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ est appelé *ensemble quotient* de $X$ par $\mathcal{R}$. On le note $X/\mathcal{R}$. C'est une partition de $X$.

On notera $p : X \to X/\mathcal{R}$ la surjection canonique. On définit une topologie *quotient* sur $X/\mathcal{R}$ de la façon suivante : $A \subset X/\mathcal{R}$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(A) \subset X$ est ouvert.

**1)** Soit $X$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $X$. Supposons que son graphe $\Gamma$ est fermé dans $X \times X$ et que la projection $p : X \to X/\mathcal{R}$ ouverte, *i.e.* l'image par $p$ d'un ouvert est un ouvert. Montrer que $X/\mathcal{R}$ est séparé.

**2)** Soit $G$ un groupe multiplicatif muni d'une topologie séparée $\mathcal{T}$. On dit que $(G, \mathcal{T})$ est un *groupe topologique* si les opérations $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continues respectivement de $G \times G$ dans $G$ et de $G$ dans $G$.

Soit $X$ un espace topologique, $G$ un groupe topologique opérant continûment sur $X$, *i.e.* l'application $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times X$ dans $X$ est continue. Montrer que la projection $p : X \to X/G$ est ouverte.

**3)** **($\star$)** On définit deux relations :
– d'une part sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ : $x\mathcal{R}y$ ssi il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$.
– d'autre part sur $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ : $x\mathcal{A}y$ ssi $y = \pm x$ (antipodie).

Montrer que $S^n/\mathcal{A}$ et $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathcal{R}$ sont homéomorphes pour les topologies quotients, que les quotients sont séparés et compacts. L'espace $S^n/\mathcal{A}$ (ou $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathcal{R}$) est appelé espace projectif réel et noté $\mathbb{R}P^n$. Montrer que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à $S^1$.

**Exercice 12.** Soit $K$ l'espace

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

muni de la topologie produit. Montrer que $K$ est homéomorphe à $K^{\mathbb{N}}$ (où $K^{\mathbb{N}}$ est lui-même muni de la topologie produit).

**Exercice 13.** On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante : $x \sim y$ si et seulement si $x - y$ est rationnel. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ l'espace des classes d'équivalence, muni de la topologie quotient. Décrire cette topologie.

**Exercice 14.** Soit $X$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ suivant :

$$\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1), x \in \mathbb{R}\}$$

muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$. On considère la relation d'équivalence engendrée par les relations suivantes : $(x, 0) \sim (x, 1)$ pour tout réel $x$ non-nul. Soit $Y$ l'espace quotient de $X$ par cette relation et $p : X \to Y$ la projection associée. Vers quoi converge la suite

$$p((\frac{1}{n}, 0))$$

dans l'espace $Y$ ?