L3 Mathématiques

TOPOLOGIE

Examen partiel du 18 novembre 2008

Durée : 2 heures, les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.

Les exercices sont indépendants. Le sujet est long, mais le barème sera adapté en conséquence. Je serai exigeant sur la rédaction et il sera plus rentable de faire les choses bien que de vouloir aller trop vite.

Exercice 1

Un espace topologique est *localement connexe par arcs* si tout point possède une base de voisinages composée de voisinages connexes par arcs.

1°) Montrer que si X est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.

2°) Si l'espace est métrique, montrer qu'il est localement connexe par arcs si et seulement si :

pour tout x et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que tout $y \in B(x;\alpha)$ peut être joint à x par un chemin continu dont l'image est contenue dans $B(x;\varepsilon)$.

3°) Montrer que si K est métrique compact et localement connexe par arcs,

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que deux points x et y vérifiant $d(x,y) \leq \delta$ peuvent être joints par un arc continu, dont l'image est de diamètre $\leq \varepsilon$.

Exercice 2

Soit $E = \{0,...,9\}^{\mathbb{N}}$ (suites infinies de chiffres). On munit $\{0,...,9\}$ de la topologie discrète et E de la topologie produit.

1°) Donner une base $\mathcal{B}$, la plus simple possible, de la topologie de E.

2°) Montrer que E est compact, totalement discontinu, sans point isolé.

3°) Montrer que E est séparable.

On pose Θ : $E \to [0,1]$; $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \Theta(a) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_i}{10^{i+1}}$

4°) Montrer que Θ est continue, surjective mais pas injective.

5°) Peut-on trouver une application continue bijective de E sur $[0,1]$?

Problème 3

Soit (X,d) un espace métrique.

1°) Soit A une partie de X. Montrer que l'application :

$$d_A : X \to \mathbb{R}_+ \ ; \ x \mapsto d_A(x) = d(x,A) = \inf\{d(x,a) \ ; \ a \in A\}$$

est lipschitzienne de rapport 1.

Tournez la page S.V.P.

2°) Si A est une partie de X et $r>0$, on note $V_r(A)=\{x\in X;\ \exists a\in A,\ d(x,a)<r\}$. Montrer que cet ensemble est un ouvert de X.

3°) Dans le cas (juste pour cette question) où X est un espace vectoriel normé, montrer que si A est connexe, alors $V_r(A)$ est connexe. Donner un contre-exemple si X est seulement métrique.

4°) Soient A et B deux parties compactes non vides de X. Montrer qu'il existe un réel r tel que :

$$A\subset V_r(B)\ ;\ B\subset V_r(A)$$

On pose alors : $\delta(A,B)=\inf\{r>0\ ;\ A\subset V_r(B)\ ;\ B\subset V_r(A)\}$.

5°) Montrer que cela définit une distance sur l'ensemble Γ des parties compactes non vides de X.

6°) Soient A et B deux parties compactes non vides de X. Montrer qu'il existe une constante k telle que : $\forall x\in X,\ |d_A(x)-d_B(x)|\le k$.

7°) Montrer alors que : $\sup\{|d_A(x)-d_B(x)|,\ x\in X\}$ est bien défini et vaut $\delta(A,B)$.

On suppose désormais, jusqu'à la fin du problème, que X est compact.

8°) Soient A_n, $n\in\mathbb{N}$ des fermés non vides. On suppose que d_{A_n} converge uniformément vers $f\in C^0(X,\mathbb{R})$ et on pose $A=f^{-1}(\{0\})$.

a) Soit $x\in X$. Montrer que : $\forall n,\ \exists x_n\in A_n$ tel que $d_{A_n}(x)=d(x,x_n)$.

b) Soit u_k, $k\in\mathbb{N}$ une suite de X qui converge vers un point u et telle que $u_k\in A_{n(k)}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} n(k)=+\infty$. Montrer que $u\in A$.

c) À l'aide de a) et b), montrer : $\forall x\in X,\ f(x)\ge d_A(x)$. Remarquer qu'on a montré au passage que A est non vide.

d) Soit $x\in X$. À l'aide de a), montrer que tout point $a\in A$ est limite d'une suite de points $a_n\in A_n$ et en déduire $d(x,a)\ge f(x)$.

e) Conclure que $f=d_A$

9°) Montrer que $\{d_A, A\in\Gamma\}$ est un fermé de $C^0(X,\mathbb{R})$, norme sup et que Γ, muni de la distance δ, est un compact.

Exercice subsidiaire

Soient L, X et Y trois espaces topologiques, X compact et Y séparé. On donne une fonction continue $f:L\times X\to Y$. Pour $(\lambda,x)\in L\times X$, on notera indifféremment $f_\lambda(x)=f(\lambda,x)$.

Pour $y_0\in Y$, on pose : $L_{y_0}=\{\lambda\in L,\ \exists x\in X,\ f_\lambda(x)=y_0\}$.

1°) Montrer que L_{y_0} est un fermé de L. L'hypothèse X compact est-elle nécessaire ?

2°) On suppose L_{y_0} non vide et que pour tout $\lambda\in L_{y_0}$ l'équation $f_\lambda(x)=y_0$ a une *unique* solution que l'on notera $\theta(\lambda)$. Montrer que l'application θ est continue $L_{y_0}\to X$.