L3 Mathématiques

TOPOLOGIE

Examen final du 12 janvier 2009

Durée : 3 heures, les documents ne sont pas autorisés.

Comme d'habitude le sujet est long. Je serai exigeant sur la rédaction et il sera plus rentable de faire les choses bien que de vouloir aller trop vite en étant imprécis.

Problème 1

On considère $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$ que l'on munit de la distance induite par celle de $\mathbf{C}$ et l'application $\Pi\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{T}\ ;\ t \mapsto e^{2i\pi t}$.

1°) Pour tout u dans $\mathbf{R}$, montrer que la restriction de Π à $\left]u - \frac{1}{4}, u + \frac{1}{4}\right[$ est un homéomorphisme de $\left]u - \frac{1}{4}, u + \frac{1}{4}\right[$ sur la boule $B_{\mathbf{T}}\left(\Pi(u); \sqrt{2}\right)$.

On s'intéresse aux applications continues de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{T}$, dont on note l'ensemble $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$, qu'on munit de la distance sup.

2°) Montrer que $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$ est complet.

3°) Soit $f \in C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$. Soient deux fonctions continues F_1, F_2, définies sur deux intervalles I_1, I_2 de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, et vérifiant : $\forall t \in I_1,\ \Pi \circ F_1(t) = f \circ \Pi(t)$ et $\forall t \in I_2,\ \Pi \circ F_2(t) = f \circ \Pi(t)$. Montrer que $F_2 - F_1$ est constante sur $I_1 \cap I_2$ (la valeur constante étant dans $\mathbf{Z}$)

4°) Soit $f \in C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et pour tous $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $\Pi(y) = h(\Pi(x))$ il existe une application continue $F_x^y\ :\ \left]x - \delta, x + \delta\right[\to \mathbf{R}$ telle que

$$F_x^y(x) = y \qquad \forall t \in \left]x - \delta, x + \delta\right[,\ \Pi \circ F_x^y(t) = f \circ \Pi(t).$$

5°) Soit $f \in C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$. Montrer qu'il existe $F\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $\Pi \circ F = f \circ \Pi$.

On dira que F est un *relevé* de f. Notons qu'en vertu de 3°), deux relevés diffèrent d'un entier.

6°) Montrer que si F est un relevé de f, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x+1) - F(x)$ est un entier relatif, indépendant de x (et du relevé choisi).

Cet entier s'appelle le *degré* de f, noté $\deg f$.

7°) Construire, à l'aide de Π, un homéomorphisme entre $\mathbf{T}$ et $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ muni de la topologie quotient. Montrer que si F est une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\forall x,\ F(x+1) = F(x+k)$, elle est le relevé d'une application de $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$.

A– Propriétés et applications du degré

8°) Pour $k \in \mathbf{Z}$, donner un exemple d'application de degré k dans $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$.

9°) Montrer que si $\deg f \neq \pm 1$, alors f n'est pas injective.

Tournez la page S.V.P.

10°) Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbf{T}$ si et seulement si elle est de degré ± 1 et possède un relevé strictement monotone.

11°) Montrer que $f \mapsto \deg f$ est continue $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T}) \to \mathbf{Z}$. L'espace $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$ est-il connexe ?

12°) La partie de $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$ formée des applications de degré k fixé est-elle connexe, compacte ?

Supposons qu'il existe une application continue g <u>sans point fixe</u> de $B = \{z \in \mathbf{C},\ |z| \leq 1\}$ dans elle-même. Si γ est une application continue $\mathbf{T} \to B$, on définit l'*indice* de γ comme étant le degré de l'application $\mathbf{T} \to \mathbf{T}$; $t \mapsto \dfrac{g(\gamma(t)) - \gamma(t)}{\|g(\gamma(t)) - \gamma(t)\|}$.

13°) Calculer l'indice de l'inclusion de $\mathbf{T}$ dans B.

14°) Montrer le théorème de Brouwer en dimension 2 : il n'existe pas d'application continue sans point fixe de B dans B.

B– Conjugaison (sauf les deux dernières questions, cette partie est indépendante de ce qui précède)

Soit E l'ensemble des fonctions continues croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant de plus :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad F(x+1) = F(x) + 1$$

On pose : $\forall (F_1,F_2) \in E^2,\quad \Delta(F_1,F_2) = \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |F_1(x) - F_2(x)|$

15°) Montrer que $\Delta(F_1,F_2) < +\infty$ et que Δ est une distance.

16°) Montrer que (E,Δ) est complet.

Soit G une fonction continue strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant :

$$\exists n \in \mathbf{N}^*,\quad \forall x \in \mathbf{R},\ G(x+1) = G(x) + n$$

17°) Montrer que $G(\mathbf{R})$ est un intervalle et en déduire que $G(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

18°) Montrer que l'image par G d'un intervalle ouvert borné est un intervalle ouvert borné et en déduire que G est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$.

On suppose désormais que G est de classe C^1 et $\exists k > 1,\ \forall x \in \mathbf{R},\ G'(x) \geq k$. Montrer que $n > 1$.

Pour $F \in E$, on pose $T(F)(x) = G^{-1} \circ F(nx)$

19°) En étudiant T, montrer qu'il existe une unique fonction $H \in E$ telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ G(H(x)) = H(nx)$. Montrer que H est strictement croissante et un homéomorphisme de $\mathbf{R}$.

20°) Soit g une application de $C^0(\mathbf{T},\mathbf{T})$ dont G est un relevé. Montrer que g est *conjuguée* à $p_n\ :\ z \mapsto z^n$, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme h de $\mathbf{T}$ tel que : $g = h \circ p_n \circ h^{-1}$.

21°) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{T}$, $g^{-1}(\{x\})$ contient exactement n points.

C– Stabilité

22°) Soit A une application linéaire continue bijective d'un espace de Banach E dans lui-même. Rappeler pourquoi son inverse est continu. On suppose que $\|A^{-1}\| < 1$. On notera $C_b(E,E)$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de E dans E, muni de la norme sup.
Montrer que si $\eta \in C_b(E,E)$, il existe un unique $\psi \in C_b(E,E)$ tel que :

$$A \circ (Id + \psi) = (Id + \psi) \circ (A + \eta)$$

23°) Montrer que si η est lipschitzienne, de constante de lipschitz suffisamment petite, alors $Id+\psi$ est injective.

24°) En déduire que pour $n\neq 0$, $p_n \ : \ z \mapsto z^n$ est *structurellement stable* : toute application du cercle suffisamment proche (dans un sens que vous préciserez) est conjuguée à $p_n \ : \ z \mapsto z^n$.

Exercice 2

On considère l'espace suivant :

$$\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R}) = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}},\ u_n \in \mathbf{R},\ \sum_{k\in\mathbf{N}} u_k^{\ 2} < +\infty \text{ et } \sum_{k\in\mathbf{N}} u_{-k}^{\ 2} < +\infty \right\}$$

et on pose (en admettant que les deux séries convergent) :

$$\forall u,v \in \ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R}),\ \langle u,v\rangle = \sum_{k\in\mathbf{N}} u_k v_k + \sum_{k\in\mathbf{N}^*} u_{-k} v_{-k} \underset{\text{notation}}{=} \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n v_n \quad \text{et} \quad \|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

1°) Montrer que $\langle u,v\rangle$ est bilinéaire symétrique, et en considérant $\langle u+tv, u+tv\rangle$ pour $t\in\mathbf{R}$, la formule de Cauchy-Schwarz : $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$.

2°) Montrer que $\|\ \|$ est une norme, que $\langle .,.\rangle$ est continue $\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R})\times\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ pour la topologie associée à cette norme. Montrer que $\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ est complet.

3°) Soit A une application linéaire de $\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ dans lui-même telle que $\forall u,v \ \ \langle A(u),v\rangle = \langle u,A(v)\rangle$. Montrer que A est continue.

4°) Soit X un espace métrique possédant une partie dénombrable dense D et Y un espace métrique complet. Soit une suite d'applications f_k de X dans Y qui est une famille uniformément équicontinue. On suppose que pour tout x dans D, $f_k(x)$ a une limite. Montrer qu'alors f_k converge simplement vers une fonction f.

5°) Montrer que la boule unité fermée de $\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R})$ contient une partie dénombrable dense.

6°) En s'aidant de 4°) et 5°), trouver une distance sur B', la boule unité fermée du dual topologique (espace des formes linéaires continues) de $\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R})$, qui définit la même topologie que la topologie faible-*.

7°) Montrer que toute suite de formes linéaires continues sur $\ell^2(\mathbf{Z},\mathbf{R})$, de normes plus petites que 1, possède une suite extraite qui converge simplement vers une forme linéaire continue.