Dérivabilité

1. **Dérivabilité et monotonie**
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{4}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) > 0$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de f au voisinage de 0 ?
On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$:
$$x_k = \frac{1}{\pi/3 + k\pi} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{1}{-\pi/3 + k\pi}$$
Montrer que si k est impair (respectivement pair) et $y_k < \frac{1}{16}$, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $]x_k; y_k[$.
En déduire que f n'est croissante sur aucun voisinage de 0.

2. **DL et dérivabilité**
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

3. **Définition de la dérivée** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $\{x \in I / \ f(x) = f'(x) = 0\} = \emptyset$.
Montrer que les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire que si x est un zéro de f :
$$\exists\ \varepsilon > 0 / \ \forall y \in]x - \varepsilon; x + \varepsilon[, \ f(y) \neq 0$$

4. **Equadiff-Convexité**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que :
$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ f''(x) = -x|f(x)|$$
Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

5. **Compacité-TVI**
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que
$$\forall x \in [a; b], \ \exists\ y \in [a; b] / \ f(x) = g(y)$$
Montrer que $\exists\ c \in [a; b] / \ f(c) = g(c)$.

6. **Dérivée en 0** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable en 0. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(kx) = kf(x)$.
Montrer que $\exists\ \alpha \in \mathbb{C} / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \alpha x$.

7. **Dérivabilité en 0** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0. On suppose que $\frac{f(2x)-f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} l$. Montrer que f est dérivable en 0.

8. **Dérivée à droite et à gauche-$\mathcal{C}^0$apm**
   Soit E l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux sur $[a;b]$.
   Pour tout $\lambda \in [a;b]$, on définit la fonction $f_\lambda : \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x-\lambda| \end{array}$.
   Montrer que les f_λ forment une base de E.

9. **Fonction plateau**
   Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{l} e^{-1/x} \quad \text{si} \quad x>0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   En déduire que $\exists\ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) /\ \forall x,\ (|x|>1 \Rightarrow \varphi(x)=0)$.

10. **Théorème de Darboux**