EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1. **Recollement** Trouver les solutions maximales de $xy' - 3y = 0$.

2. **Dérivabilité automatique**
   Soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall\, x \in\,]-1;1[\ ,\ f(x) = 1 + \int_0^x f(t)^2 dt$.
   Montrer que $\forall\, x \in\,]-1;1[\ , f(x) \neq 0$. En déduire f.

3. **DSE à reconnaître** Trouver la solution générale de $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$.

4. **DSE à reconnaître** Trouver la solution générale de $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$.

5. **Système diagonalisable**
   Trouver la solution générale du système : $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{array} \right.$

6. **Convexité** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
   On suppose de plus que f vérifie l'équation différentielle $y'' = -x|y|$.
   Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

7. **CN/CS-Dérivabilité automatique**
   Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f)(x) = \int_0^x \left(\int_t^1 f(u)du \right) dt$.
   Vérifier que T est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.