Intégration sur un intervalle quelconque

ENSI 97

1. **Cauchy-Schwarz**
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ existe. Montrer que :
$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Centrale 97

2. **Candidat/validation**
Déterminer la partie principale de $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}dt$ en 0^+ et $+\infty$.

TPE 97

3. **Lien fonction-dérivée**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que la fonction $t \mapsto tf'(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que f a une limite l en $+\infty$ et que si $l = 0$, alors $tf(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

ENSI 97

4. **Intégration de << + IPP**
Soit $a \geq 1$ fixé. Déterminer la partie principale de $\int_a^x \sqrt{t\ln(t)}dt$ en $+\infty$.

5. **Minoration** Trouver la limite en $+\infty$ de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+sin(1/n)}dt$.

6. **Intégrale impropre** Etudier la nature de l'intégrale impropre :
$$\int_2^{+\infty^-} \frac{1-\cos(x)}{\ln(x)}dx$$

Mines 97

7. **Dérivation sous $\int$** On pose :
$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2/(\cos(\theta))^2}dt$$
Montrer que $f^2 + g$ est constante. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Centrale 97

8. **Dérivation sous $\int$** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}dt$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et obtenir sa valeur explicite.

Centrale 98

9. **A la main** Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite en 0^+ de :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2}dt$$

Centrale 99

10. **CVD continu** Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est strictement positive et que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on définit :

$$h(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+\lambda g(t)}dt$$

Déterminer la limite de h en $+\infty$.

11. **Intégration d'équivalent** Soit F définie sur $[0;1[$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$$

Montrer que F a une limite l en 1^- et calculer l. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt$$

12. **Cauchy-Schwarz** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On suppose de plus que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\int_0^{+\infty} f'(t)^2dt \leq \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2dt\right) \times \left(\int_0^{+\infty} f''(t)^2dt\right)$$

13. **CVD** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to E$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux. On suppose que f est $\mathbb{R}^+$-intégrable et que g est bornée et a une limite en $+\infty$. Etudier $\int_0^{+\infty} f(t)g(t^n)dt$ quand $n \to +\infty$.

14. **CVD-IAF** Trouver les deux premiers termes du DL en $+\infty$ de

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{1/n}}{1+t}dt$$

15. **Cauchy-Schwarz** Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}^{+*})$. Pour $f \in E$, on pose :

$$I(f) = \left(\int_0^1 f(t)dt\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}dt\right)$$

Déterminer $inf\{I(f)/ \ f \in E\}$. Pour quelles valeurs est-il atteint ?