RÉVISIONS DE SUP

1. **Trigonométrie**
   - Calculer $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$.
   - Résoudre $\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$.
   - Etudier et tracer la fonction $x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

2. **Trigonométrie-Continuité** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues en 0 telles que $\forall t \in \mathbb{R}, f(2t) = f(t)\cos(t)$

3. **Trigonométrie-Polynômes** Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

4. **Polynômes de Chebichef**
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ !\ T_n \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$, et que les polynômes T_n sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

5. **DL-DA**
   ⋆ existence et valeur de $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4+x+1} - x^2)$

   ⋆ équivalent en 0 de $\frac{(\sin(x))^x - x^{\sin(x)}}{x+\ln(1-x)}$

   ⋆ calculer $\lim_{n\to\infty}[\cos(\frac{n\pi}{3n+1}) + \sin(\frac{n\pi}{6n+1})]^n$

   ⋆ Trouver les quatre premiers termes du DA de la n° racine strictement positive de l'équation $\tan(x) = x$.

6. **Taylor**
   Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que
   $\exists \alpha \in [0;1] / \forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, f(x+h) - f(x) = hf'(x+\alpha h)$.

7. **DL-Déterminants** Montrer que la famille $(x \mapsto Argsh(\lambda x))_{\lambda>0}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

8. **Suites récurrentes-Cesaro** Soit $f : x \mapsto \sin(x)$.
   Montrer que f admet sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ un unique point fixe et étudier la suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (remarque : f est-elle contractante ?).
   On suppose $0 < x_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et on note $u_n = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{3}$ et en déduire un équivalent de x_n.

9. **Sous-suites** Soit $(u_n)_n$ une suite (réelle ou complexe) telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent. Est-ce que $(u_n)_n$ converge ? Qu'en est-il si de plus $(u_{3n})_n$ converge ?

10. **Suites adjacentes-Trigonométrie**
    Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n, (b_n)_n$ les suites définies par :

    $$a_0 = a,\ b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

    Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, puis calculer leur limite commune.

11. **CVS,CVU** Etudier la convergence des suites de fonctions :

    $$f_n : x \mapsto \frac{(x+1)^n - 1}{(x+1)^n - 1} \quad ; \quad f_n : x \mapsto \frac{nx^2}{1 + n|x|}$$

    $$f_n : x \mapsto \frac{nx^3}{1 + nx^2} \quad ; \quad f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$$

12. **CVS,CVU** Soit $k > 0$ fixé et $(f_n)_n$ une suite de fonctions k-lipschitziennes sur $[a; b]$ telle que $f_n \xrightarrow[sur[a;b]]{CVS} f$: montrer que la convergence est uniforme.

13. **Gauss-Lucas** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, de racines (non nécessairement distinctes) $z_1, \ldots, z_n$.
    Montrer que si z est racine de P', alors z est une combinaison barycentrique à coefficients > 0 de $z_1, \ldots, z_n$. Que peut-on en déduire sur les racines de P' si P a toutes ses racines réelles ?