Séries numériques

ENSI

1. **DL+TSA** Nature de la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2\pi\ln(\frac{n-1}{n})\right) \quad ; \quad u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \quad ; \quad u_n = -1+\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}$$

$$u_n = \cos\left(\arctan(n) + \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha > 0) \quad ; \quad u_n = \sin(\pi e n!)$$

$$u_n \text{ et } (-1)^n u_n \text{ où } u_n \text{ est définie par } u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$$

2. **TSA** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante convexe telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On note $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n f(n)$. Justifier cette écriture et déterminer la nature de la série $\sum r_n$.

3. **d'Alembert**
Nature de la série de terme général

$$u_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{x}{k}\right) \quad x \in \mathbb{R} \quad ; \quad u_n = \frac{n^\alpha}{(n+1)\dots(n+n)} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{1+a_n}$ où a_n est définie par $a_0 > 0, a_{n+1} = a_n + a_n^2$ converge et calculer sa somme $[\frac{1}{a_0}]$

4. **téléscopage**
Existence et calcul de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n\ln\left(\frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$$

ENSI

5. **comparaison avec $\int$**
• Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Nature de la série de terme général $\frac{R_n}{S_n}$?
• Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue décroissante et $(a_n)_n$ une suite stictement croissante de réels positifs. On suppose de plus que f est $\mathbb{R}^+$-intégrable. Montrer que :
→ $\sum(a_n - a_{n-1})f(a_n)$ converge
→ $\sum(a_n - a_{n-1})f(a_{n-1})$ n'est pas nécessairement convergente

6. **comparaison** Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{a_n!} \quad \text{où } a_n \text{ est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n}$$

$$u_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}} \quad ; \quad u_n = \frac{1!+\cdots+n!}{(n+p)!} \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$u_n = f(n) \quad \text{où } f \in \mathcal{C}^1([1;+\infty[, \mathbb{R}^{+*}) \text{ vérifie } \frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

$$u_n = \frac{1}{(\ln(2))^2+\cdots+(\ln(n))^2}$$

7. **regroupement par paquets**
Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+(-1)^n}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n^{1+i\gamma}} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^\alpha(\sqrt{n}+(-1)^n)} \quad (\alpha > 0, n \geq 2)$$

8. **calcul des sommes partielles+TSA**
Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k})$

9. **transmission de $\sim$**
On définit $a_n = \frac{e^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Trouver un équivalent en $+\infty$ de $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

10. **série-produit et DES** Soit $x \in]0;+\infty[$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = e\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$$

11. **Critère de Cauchy**
Une suite $(u_n)_n$ est dite *de Cauchy* $\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0, \exists N / \forall p \geq q \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \epsilon$.
• Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles : montrer que $(u_n)_n$ converge ssi c'est une suite de Cauchy.
• En déduire une CNS de convergence pour les séries à valeurs réelles.
• Le résultat est-il toujours vrai pour les suites (resp. les séries) à valeurs dans $\mathbb{C}$?

12. **Lemme d'Abel** Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive décroissante telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum u_n$ une série complexe telle que :

$$\exists M/ \ \forall p \geq q, \ |\sum_{n=q+1}^{p} u_n| \leq M$$

Montrer que $\sum a_n u_n$ converge.
Application : montrer que $\sum \frac{e^{in\theta}}{n} \quad (\theta \in \mathbb{R})$ converge ssi $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

13. **constante d'Euler**
Montrer que la suite $S_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ converge vers une limite, notée γ. Montrer que $\gamma = \int_1^{+\infty}(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{x})dx$ et en déduire que $\gamma > 0$.

Centrale

14. **racines de l'unité**
Existence et valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(5n)!}$.

15. **e est irrationnel** On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Montrer que $S_n \leq e \leq S_n + \frac{1}{n(n!)}$ et en déduire que e est irrationnel.