Réduction

1. **Diagonalisabilité**
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2. **Vp d'une matrice antisymétrique**
Que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice M antisymétrique réelle ? En déduire que $M + I$ est inversible.

Centrale 98

3. **Calcul de exp(A)**
Calculer $\exp(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Centrale 98

4. **Polynôme caractéristique** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n > 1)$. On suppose :
$$\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ det(A + M) = det(A) + det(M)$$
Montrer que $A = 0$.

ENSI 99

5. **Diagonalisabilité**
Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

6. **Polynôme annulateur-$\mathbb{R}/\mathbb{C}$**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$? Même question pour $M \in \mathcal{M}_n(R)$.

7. **Polynôme annulateur**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ non injective. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $E = Ker(u) \oplus Im(u)$
(ii) il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $u \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où A est inversible
(iii) u annule un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$

8. **Diagonalisabilité**
Montrer que $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

9. **Sev stables**

Déterminer tous les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Centrale 00

10. **Groupes-Diagonalisation** Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall\, x \in G,\ x^2 = I_n$. Montrer que :
- G est abélien ;
- les éléments de G sont simultanément diagonalisables ;
- G est fini ;
- $GL_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $GL_m(\mathbb{C})$ si et seulement si $n = m$.

ENSI 94

11. **Eléments propres-Comatrice** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = {}^t com(A)$. Montrer que tout vecteur propre pour A l'est aussi pour B.
Lorsque A est diagonalisable, exprimer les valeurs propres de B en fonction de A.

Mines 94

12. **Récurrence-Trigonalisation** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose : $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

13. **Polynôme de matrice** Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :
$$M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

14. **Eléments propres**
Soit $n \geq 3$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & \dots & 2 \\ 1 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

15. **Endomorphisme sur $\mathbb{C}[X]$** Soit $n \geq 2$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$.
Pour $P \in E$, on définit $f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer son noyau, son image et ses éléments propres.

16. **Endomorphisme sur $\mathbb{C}[X]$**
Soit T défini sur $\mathbb{C}[X]$ par $T(P) = (3X+8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P''$.
Déterminer les éléments propres de T.

17. **Polynôme caractéristique** Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \quad \text{et} \quad tr(A) = 8$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

18. **Exponentielle matricielle** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists\ P \in \mathbb{K}[X] /\ e^A = P(A)$.