Algèbre linéaire

1. **DL-Déterminants** Montrer que la famille $(x \mapsto Argsh(\lambda x))_{\lambda>0}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. **Supplémentaires** Soit E et F deux K-ev de dimension finie, A un sous-ev de E et B un sous-ev de F. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
$$(i)\ \exists\ f \in \mathcal{L}(E,F)/ \left\{ \begin{array}{l} A = Ker(f) \\ B = Im(f) \end{array} \right. \qquad (ii)\ dim(A) + dim(B) = dim(E)$$

3. **Supplémentaires** Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $Im(f)$ admet un supplémentaire dans E stable par f si et seulement si $Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$.
En déduire que $Ker(f)$ est l'unique supplémentaire de $Im(f)$ dans E stable par f.

4. **Produit par blocs** Soit $n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \in K,\ L \in \mathcal{M}_{1,n}(K),\ C \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$.
On pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible, et calculer A^{-1} dans ce cas.

5. **Déterminant de Van Der Monde**
Soit $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ où l'on a posé $z_{n+1} = z_1$. Considérons la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = z_j^i + z_{j+1}^i$. Calculer $det(A)$.

Mines

6. **Projecteurs-Sev stables** Soit E un K-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = id_E$ et F un sous-ev stable par u. On se donne p un projecteur sur F et on pose $q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k}$.
Montrer que $q \circ u = u \circ q$ et $p \circ q = q$. En déduire que q est un projecteur vérifiant $q \circ p = p$, puis que $Ker(q)$ est un supplémentaire de F stable par u.

Mines

7. **Projecteurs**
Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u^2 = 0$ si et seulement si il existe un projecteur p tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

ENSI

8. **AL définie par restriction** Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et G un sous-ev de E. On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(E,F)/\ G \subset Ker(u)\}$. Montrer que A est un sous-ev de $\mathcal{L}(E,F)$ et déterminer sa dimension.

9. **Supplémentaires-Familles liées** Soit $k,\ n,\ p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $p \leq n$ et que K est soit infini, soit de cardinal $> k(n-1)$. Soit E un K-ev de dimension n et $F_1, \ldots, F_k$ des sous-ev de même dimension p.

   Montrer que $F_1, \ldots, F_k$ admettent un supplémentaire commun dans E.

10. **Produit par blocs** Soit $p,\ q \in \mathbb{N}^*$ et $M \in GL_{p+q}(K)$. On écrit :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_p(K),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(K),\ C \in \mathcal{M}_{q,p}(K),\ D \in \mathcal{M}_q(K) \\ R \in \mathcal{M}_p(K),\ S \in \mathcal{M}_{p,q}(K),\ T \in \mathcal{M}_{q,p}(K),\ U \in \mathcal{M}_q(K) \end{array} \right.$$

   Montrer que $det(A)det(R) = det(D)det(U)$.

Centrale 95

11. **Supplémentaires-Projecteurs** Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et L_1, L_2 deux sous-ev supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$\forall\ (f,g) \in L_1 \times L_2,\ f \circ g + g \circ f = 0$$

   Montrer que soit $L_1 = \{0\}$, soit $L_2 = \{0\}$.

12. **Réunion de sous-ev** Soit E un K-ev et $E_1, \ldots, E_s$ des sous-ev de E. On suppose K infini ou bien de cardinal $> s$.

   Montrer que $\bigcup_{i=1}^{s} E_i$ est un sous-ev de E si et seulement si l'un des E_i contient tous les autres.

13. **Restriction à supplémentaire du noyau** Soit E et F deux ev et $f,\ g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $Ker(f) \subset Ker(g) \Leftrightarrow \exists\ h \in \mathcal{L}(F)/\ g = h \circ f$.

14. **Ev sur un corps fini** Soit K un corps de cardinal q et E un K-ev de dimension n. On fixe E_0 un sous-ev de E de dimension $r < n$.

   Combien E_0 a-t-il de supplémentaires dans E ?

15. **Projecteurs-Sommes directes** Soit E un K-ev de dimension finie et $p_1, \ldots, p_s$ des projecteurs tels que $p_1 + \cdots + p_s = id_E$. Montrer que

$$\forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$$

16. **Déterminant-Familles libres**

   Soit K un corps, A un ensemble et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de A dans K. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre si et seulement si :

$$\exists\ x_1, \ldots, x_n \in A/\ det(f_i(x_j))_{i,j} \neq 0$$

ENSI

17. **Applications affines**
Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ telles que les restrictions $f_{|[-1;0]}$ et $f_{|[0;1]}$ soient affines. Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-ev et donner une base de E.

18. **Expression d'une AL de $\mathcal{M}_n(K)$**
Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. On définit $\varphi_P : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$. Calculer $Tr(\varphi_P)$.

19. **Expression d'une AL de polynôme**
Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}^n[X]$ par
$$f(P) = Q \quad \text{où} \quad Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n[X]$, et calculer son déterminant.

20. **Familles liées-Morphismes de groupes**
Soit $(G, \bullet)$ un groupe et $(K, \times, +)$ un corps. Vérifier que l'ensemble H des morphismes de groupes de $(G, \bullet)$ dans $(K, \times)$ est un K-ev.
On suppose que $\rho_1, \ldots, \rho_n \in H$ sont deux-à-deux distincts. Montrer que $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ est libre sur K.

21. **Van der Monde** Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de terme général $1 + a_i^j$.

22. **Dimensions** Soit E un ev de dimension n et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-ev de E. On suppose que $\sum_{k=1}^p dim(E_k) > (p-1)n$. Montrer que $E_1 \cap \ldots \cap E_p \neq \{0\}$.

23. **Complexification** soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une $\mathbb{C}$-base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\tilde{f}$ l'application f en tant qu'application $\mathbb{R}$-linéaire. Calculer $det(\tilde{f})$ en fonction de $det(f)$.

24. **Continuité du déterminant-Familles liées** Soit E un K-ev de dimension m et $(u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (u_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E. On suppose :
$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ u_n^{(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} w_i \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(p)}) \text{ est liée} \end{cases}$$
Montrer que $(w_1, \ldots, w_p)$ est liée.

Mines Centrale 97

25. **Trace-AL** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $M + A\ Tr(M) = B$.

ENSI 97

26. **Construction progressive d'une AL** Soit E un K-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme ω tels que $f = p \circ \omega$.

ENSI

27. **Rang d'une famille de vecteurs** Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de l'ev E. Montrer que $\forall m \leq n,\ rg(v_1, \ldots, v_m) \geq (v_1, \ldots, v_n) + m - n$.

28. **Dualité** Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f, g, h les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par
$$f : P \mapsto P(a) \quad , \quad g : P \mapsto P'(b) \quad , \quad h : P \mapsto P''(c)$$
Montrer que (f, g, h) est libre et déterminer la base dont elle est la duale.

29. **Vecteurs propres-Sev stable-Van der Monde** Soit E un K-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E_0 un sous-ev de E stable par f.
Soit $v_1, \ldots, v_s \in E$ tels que $\forall i,\ \exists \lambda_i \in K /\ f(v_i) = \lambda_i v_i$ où les λ_i sont deux-à-deux distincts.
Montrer que si $v_1 + \cdots + v_s \in E_0$, alors $\forall i,\ v_i \in E_0$.

30. **Dualité** Soit E et F deux ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On rappelle que ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est définie par ${}^t u(f) = f \circ u$. Montrer que :
   - u injective $\Rightarrow$ ${}^t u$ surjective ;
   - u surjective $\Rightarrow$ ${}^t u$ injective.

Centrale 99

31. **Noyaux itérés** Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension n et f un endomorphisme de E supposé non nilpotent et non inversible. Montrer qu'il existe F et G deux sous-ev de E stables par f tels que :
$$E = F \oplus G, \quad f_{|F} \text{ nilpotent}, \quad f_{|G} : G \to G \text{ inversible}$$

ENSI 99

32. **Comatrice-Bézout**
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $det(A) \wedge det(B) = 1$. Montrer que :
$$\exists\ U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) /\ AU + BV = UA + VB = I_n$$

ENSI 00

33. **Formes linéaires-Trace** Soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :
$$u(I_n) = I_n \quad \text{et} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ u(AB) = u(BA)$$
Montrer que $u : M \mapsto \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M)\ I_n$.

34. **Van der Monde-Polynômes** Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux-à-deux distincts. On définit $P_j(X) = (X + a_j)^n$ pour $0 \leq i \leq n$. Montrer que $(P_j)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n[X]$.