Formes quadratiques

1. **Polarisation** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $(q_n)_n$ une suite de formes quadratiques sur E.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note ϕ_n la forme bilinéaire symétrique associée à q_n et $b^n_{i,j} = \phi_n(e_i, e_j)$.
   • exprimer $q_n(x)$ en fonction des $b^n_{i,j}$; exprimer les $b^n_{i,j}$ à l'aide de q_n.
   • montrer que $(q_n)_n$ converge simplement sur E si et seulement si $(q_n)_n$ converge uniformément sur tout borné de E.

2. **Signatures** On considère les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^n$:
   $$\sum_{i \neq j} x_i x_j \quad ; \quad \sum_{i,j} x_i x_j \quad ; \quad \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \quad ; \quad \sum_{i,j} min(i,j) x_i x_j$$
   Déterminer leur signature.

$\boxed{\text{MP}^\star}$

3. **Déterminant par blocs**
   Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.
   On suppose que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}$ est symétrique définie-positive. Montrer qu'alors $det(M) \leq det(A)det(C)$ et donner une CNS d'égalité.

4. **Formes de Henkel**
   Soit f une fonction polynômiale de degré n à coefficients réels, et s_k la $k^{ème}$ somme de Newton de f. Soit q la forme quadratique donnée par la matrice symétrique
   $$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$$
   En notant (p, m) la signature de q : montrer que f possède exactement $p + m$ racines distinctes, et $p - m$ racines réelles distinctes.

5. **Distance et ps matriciel**
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer

$$\inf_{M \in \mathcal{S}} \left(\sum_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$$

6. **Topo et FQ**
Soit $p, q \in \mathbb{N}$ fixés tels que $p + q = n$ et $\mathcal{S}_{p,q}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de signature (p, q). Montrer que $\mathcal{S}_{p,q}$ est un ouvert de l'ensemble des matrices symétriques réelles.