# Courbes

1. **Développée d'une courbe**
Soit $\Gamma$ la courbe donnée par la paramétrisation

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (a > 0)$$

Déterminer la *développée* de $\Gamma$, c'est-à-dire le lieu des centres de courbure en $M$ à $\Gamma$ pour $M$ décrivant $\Gamma$.

2. **Courbe en polaires-Points doubles**
Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + 2\cos\theta - 4(\cos\theta)^2$ et préciser ses points doubles.

3. **Tangente à une ellipse-Polynôme de d°2**
Soit $\mathcal{E}$ donnée par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $N$ le point de coordonnées $(x_0, y_0)$.
• donner une CNS pour que $\lambda \in \mathbb{R}$ soit la pente d'une tangente passant par $N$ à $\mathcal{E}$ ;
• déterminer le lieu des points du plan d'où l'on peut mener à une ellipse deux tangentes perpendiculaires.

ENSI 97

4. **Limaçons** On considère les courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ respectivement données en polaires par $\rho = a(1 + \cos\theta)$ et $\rho = a(3 + \cos\theta)$ ($\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont des *limaçons de Pascal*).
Pour $i = 1, 2$, on note $N_i(\theta)$ la normale au point $M_i$ d'angle $\theta$ sur $\Gamma_i$. Vérifier que pour tout $\theta \neq 0[\pi]$, $N_1(\theta)$ et $N_2(\theta)$ sont sécantes, en un point $P(\theta)$.
Déterminer le lieu de $P$ quand $\theta$ varie.

5. **Inflexion-DL** Montrer que la courbe $\Gamma$ paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4t-3}{t^2+1} \\ \\ y(t) = \frac{2t-1}{t^2+2} \end{cases}$$

admet un unique point non régulier, et tracer l'allure de $\Gamma$ au voisinage de ce point.