Groupes, anneaux, idéaux

ENSI 97

1. **C.S. d'abélianité** Soit G un groupe tel que :

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* /\ \forall k \in \{n-1; n; n+1\},\ \forall x, y \in G,\ (xy)^k = x^k y^k$$

Montrer que G est commutatif.

2. **Action** Montrer que en posant $(P,Q).A = PAQ^{-1}$ on définit une action du groupe $G = GL_n(\mathbb{R}) \times GL_p(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Pour cette action, décrire la relation de conjugaison, les orbites, et calculer le nombre d'orbites.

3. **Action**
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Vérifier que $G = GL(E)$ agit canoniquement sur E et en déduire une action de G sur l'ensemble X des sous-ev de E.
Soit $F \in X$: déterminer l'orbite et le stabilisateur de F (on rappelle que $Stab(F) = \{g \in G /\ g.F = F\}$). Combien existe-t-il d'orbites ?

4. **Algorithmes**
Soit $a_1 = 2214$ et $a_2 = 522$.
Déterminer $pgcd(a_1, a_2)$ et donner une relation de Bezout reliant a_1 et a_2.

5. **Algorithme d'Euclide-Polynômes** A quelle condition le polynôme $P(X) = X^3 + pX + q$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ a-t-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

6. **Eléments algébriques-Idéaux** Soit $A = \{m + n\sqrt{10} /\ m, n \in \mathbb{Z}\}$: vérifier que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
• montrer que l'application $\sigma :\ m + n\sqrt{10} \mapsto m - n\sqrt{10}$ est bien définie sur A, et que c'est un automorphisme de A (σ est parfois appelée *conjugaison*).
• montrer que l'idéal I de A engendré par 2 et $\sqrt{10}$ est strict.

7. **Carrés de $\mathbb{Z}_{/8\mathbb{Z}}$**
Soit a, b, c, d des entiers tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0\ [mod\ 8]$. Montrer que a, b, c, d sont pairs.

ENSI 99

8. **Comatrice-Bézout**
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $det(A) \wedge det(B) = 1$. Montrer que :

$$\exists\, U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) /\ AU + BV = UA + VB = I_n$$