Espaces vectoriels normés

1. **Valeurs d'adhérence** On suppose que $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ sont deux suites réelles telles que 0 soit valeur d'adhérence de la suite $(u_nv_n)_{n\in N}$. Montrer que 0 est valeur d'adhérence soit de $(u_n)_{n\in N}$, soit de $(v_n)_{n\in N}$.

2. **Ouvert/fermé**
Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante et $E := \{u_n /\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que E est fermé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3. **Calcul de norme**
Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $E := (\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R}),\ N_\infty)$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire. On suppose de plus que φ est positive ie : $\forall f \in E,\ (f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0)$.
• existe-t-il une telle application φ ?
• montrer que φ est continue et calculer sa norme d'opérateur.

4. **Critère séquentiel** On note $E := \mathcal{C}([0;1],\mathbb{C})$ muni de N_∞ et soit A une partie fermée de $\mathbb{C}$. Montrer que $E_A := \{f \in E/\ \exists\ x \in [0;1], f(x) \in A\}$ est fermé dans E.

5. **Polynômes** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note Ω_n l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n et scindés à racines simples. Montrer que Ω_n est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

6. **Calcul de normes** On note $E := (\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}),\ N_\infty)$.
• soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue : montrer que la fonction définie sur E par $G_\varphi(f) = \varphi \circ f$ est uniformément continue de E dans E. Est-elle linéaire ?
• soit ψ telle que $\psi([0;1]) \subset [0;1]$: montrer que la fonction définie sur E par $D_\psi(f) = f \circ \psi$ est linéaire continue de E dans E et calculer sa norme.

7. **Normes** Existe-t-il une norme $||.||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ ||P^{-1}AP|| = ||A||$$

Centrale

8. **Adhérence** On note E le $\mathbb{R}$-ev des suites réelles bornées muni de la norme infinie, et K le sous-ensemble de E formé des suites presque-nulles. Déterminer l'adhérence de K.

9. **Normes matricielles** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On note $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ l'application : $X \mapsto AX$. Déterminer la norme d'opérateur de f_A lorsqu'on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $||.||_1$, puis de $||.||_\infty$.

10. **Crochet de Lie-Norme d'opérateur** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé et $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. On suppose :

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{C} /\ u \circ v - v \circ u = \lambda\ id_E$$

Montrer que si E est de dimension finie, alors $\lambda = 0$.
Pour le cas général : calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et conclure.

ENSI

11. **AL continue** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est continue si et seulement si elle transforme toute suite tendant vers 0 en une suite bornée.

12. **Valeurs d'adhérence** Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_n$ une suite dans E telle que $(x_{2n})_n,\ (x_{2n+1})_n$ et $(x_{3n})_n$ soient convergentes. Montrer que $(x_n)_n$ converge.

13. **Distance**
Montrer que $d : (x, y) \mapsto \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ définit une distance sur $\mathbb{R}$. Provient-elle d'une norme ?
Construire à l'aide de d une distance sur l'ev des suites réelles.

Mines 97

14. **Normes**
Soit J une partie de $\mathbb{C}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ on pose $||P|| := Sup\{|P(z)|\ /\ z \in J\}$. Donner une CNS sur J pour que $||P||$ soit toujours fini ; on suppose dans la suite que cette condition est satisfaite.
• donner une CNS pour que $||.||$ soit une norme sur $\mathbb{C}[X]$;
• vérifier que $N_1 : P \mapsto \int_{-1}^{1} |P(x)|dx$ définit une norme sur $\mathbb{C}[X]$;
• comparer $||.||$ et N_1.

15. **Valeurs d'adhérence** Prouver que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé.

16. **Lemme d'Abel** Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive décroissante telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum u_n$ une série complexe telle que :

$$\exists M /\ \forall p \geq q,\ |\sum_{n=q+1}^{p} u_n| \leq M$$

Montrer que $\sum a_n u_n$ converge.
Application : montrer que $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ $\quad(\theta \in \mathbb{R})$ converge ssi $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

17. **Applications du critère de Cauchy**
Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles positives, décroissante. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $(v_n)_n$ une suite à valeurs réelles positives. On suppose qu'il existe une suite d'entiers $(q_n)_n$ strictement croissante telle que $\forall n,\ v_{q_n} > \frac{1}{q_n}$: montrer que $\sum v_n$ diverge.

18. **Equivalence des normes**
Soit E un ev sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Montrer que si f est une forme linéaire sur E, alors f est continue (on pourra introduire la fonction $x \mapsto ||x|| + |f(x)|$).
Montrer que sur tout evn de dimension infinie, il existe des formes linéaires non continues.
Conclure.

19. **Théorème d'Auerbach** Soit $(E, ||.||)$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension n et b_0 une base de E fixée. On cherche une base de E formée de vecteurs unitaires dont la duale soit aussi formée de vecteurs unitaires (pour la norme induite).
• vérifier que $\mathcal{N} = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^n/\ ||e_1|| = \dots = ||e_n|| = 1\}$ est un compact de E^n.
• on définit sur E^n l'application $\Delta : (x_1, \dots, x_n) \mapsto |det_{b_0}(x_1, \dots, x_n)|$. Montrer que Δ est bornée sur $\mathcal{N}$ et que $\exists\ \beta \in \mathcal{N}/\ \Delta(\beta) = Max\{\Delta(b)/\ b \in \mathcal{N}\}$.
• montrer que β convient.

Centrale 97

20. **Normes-Compacité** Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $k \geq 0$ le plus petit possible tel que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N(AB) \leq kN(A)N(B)$.
Calculer k pour $N = N_1$.

ENSI 96

21. **Compacité-Point fixe**
Soit E un evn, K un compact de E et une application $f : K \to K$ vérifiant :

$$\forall x \neq y \in K,\ ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

Montrer que f admet un point fixe.

Mines

22. **Topologie-CpA** Soit G l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont triangulaires supérieures et de déterminant 1. G est-il fermé, borné, connexe par arcs ?

23. **Inversibles d'une algèbre de Banach-Point fixe** Soit $(\mathcal{A}, ||.||)$ une algèbre de Banach et $u \in \mathcal{A}$ tel que $||u|| < 1$. En utilisant le théorème du point fixe, montrer que $(1 - u)$ est inversible.

24. **Inversibles d'une algèbre de Banach-Critère de Cauchy** Soit $(\mathcal{A}, ||.||)$ une algèbre de Banach et $u \in \mathcal{A}$ tel que $||u|| < 1$. Montrer que $(1-u)$ est inversible (on pourra introduire la suite $S_n = e + u + \cdots + u^n$ où e est l'élément neutre).

25. **Compacité** Soit $0 < a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant :

$$\forall\, x \in [a; b],\ 0 \leq f(x) < x$$

Montrer que $\exists\, k < 1 /\ \forall\, x \in [a; b],\ f(x) \leq kx$.

26. **Projection sur un sev de DF**
Soit E un evn et F un sous-ev de dimension finie de E. Montrer que :
• F est fermé dans E ;
• $\forall\, x \in E,\ \mathrm{dist}(x, F)$ est atteinte.

27. **CNS de complétude-Séries** Soit E un evn. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

28. **Espaces complets** Soit I un ensemble quelconque et F un espace de Banach. Montrer que $\mathcal{B}(I, F) := \{f : I \to F \text{ bornée}\}$ muni de N_∞ est complet.

29. **Espaces complets** Soit E et F des evn. On suppose que F est complet. Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la norme induite est complet.

30. **Continuité du déterminant et de l'inverse**

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$

sont continues.

31. **Non complétude** Soit $E = \left(\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}),\ N_1\right)$ et $E_0 = \mathcal{C}^0_{\text{pm}}([0; 1], \mathbb{R})$.
• vérifier que N_1 n'est qu'une semi-norme sur E_0 et qu'il n'y a donc pas unicité de la limite dans E_0 ;
• on définit les fonctions

$$g_n : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -nx + (1 + \frac{n}{2}) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & \text{si } 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

$$f : x \mapsto \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{array} \right.$$

Montrer que $N_1(f - g_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$;
• en déduire que $(g_n)_n$ n'a pas de limite dans E ;
• conclusion sur E ?

32. **Continuité du déterminant et espaces matriciels ouverts**
Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$ est continue.
En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert et que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ rg(M) \geq r\}$ est ouvert pour tout $r \in \mathbb{N}$.

33. **Densité matricielle** Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.