Suites et séries de fonctions

1. **CVD continu**
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée telle que $f(0) = 1$. Pour $x > 0$ on pose
$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} f(t)dt$$
Montrer que h est bien définie, et étudier sa limite pour $x \to +\infty$.

2. **CVS,CVU** Etudier la convergence des suites de fonctions :
$$f_n : x \mapsto \frac{(x+1)^n - 1}{(x+1)^n - 1} \quad ; \quad f_n : x \mapsto \frac{nx^2}{1+n|x|}$$
$$f_n : x \mapsto \frac{nx^3}{1+nx^2} \quad ; \quad f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$$

3. **CVS,CVU** Soit $k > 0$ fixé et $(f_n)_n$ une suite de fonctions k-lipschitziennes sur $[a;b]$ telle que $f_n \xrightarrow[sur[a;b]]{CVS} f$: montrer que la convergence est uniforme.

Centrale 99

4. **CVS,CVU-DL** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$$f_n(x) = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right)} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{array} \right.$$
Vérifier que f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Etudier les convergences (simple, uniforme) de la suite $(f_n)_n$.

5. **Compacité**
• Trouver toutes les fonctions f continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall\, x \in [0;1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{3^n}$$
• Trouver toutes les fonctions g continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall\, x \in [0;1],\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(x^n)}{2^n}$$

6. **Théorème des N_1** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit les fonctions f_n et g_n de $[o;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) e^{-x}\cos(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) e^{-x}\sin(nx)$$

• étudier les convergences des séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum g_n$: on note leurs sommes respectivement f et g ;
• montrer que f et g sont continues sur $[0;+\infty[$;
• montrer que f et g sont $[0;+\infty[$-intégrables et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum n = 1^{+\infty} \frac{1}{n^4}\ ,\ \int_0^{+\infty} g(x)dx = \sum n = 1^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

7. **TSW**
Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) /\ f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $e_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-nx}$.
Montrer que $Vect(\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*})$ est dense dans E pour N_∞.

8. **CVD**

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(1 - x^{1/n}\right)^{1/n} dx.$

Mines 96

9. **Bosse glissante**
Pour $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{R}$ $f_n(x) = -1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n}$.
• montrer que $\forall\ n > 1,\ \exists\ !\ x_n \in]0;1[\ /\ f_n(x_n) = 0$;
• montrer que $(x_n)_n$ est décroissante et trouver sa limite λ.
• montrer que $\forall\ n \geq 1,\ x_n - \lambda \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right)^n$.

10. **CVS,CVU-uniforme continuité**
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ et $g_n(x) = \int_0^1 t^{n-1} f(xt)dt$.
Etudier les convergences (simple, uniforme) de la suite de fonctions $(g_n)_n$.

11. **CVD-IAF** Trouver les deux premiers termes du DL en $+\infty$ de

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{1/n}}{1+t}dt$$

12. **TSA+critère de Cauchy** On définit sur $\mathbb{R}^+$ les fonctions

$$f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

13. **Exp matricielle-Equadiff** On se donne $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :
   - si $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = \exp(tB)$, alors $A = B$;
   - si $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \exp(tA)\exp(tB) = \exp(tA + tB)$, alors $AB = BA$.

ENSI 97

14. **Taylor-Laplace** Soit P_n la n-ème somme partielle de la série exponentielle et $f_n : x \mapsto e^{-x}P_n(-x)$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers $x \mapsto e^{-2x}$.

15. **Double limite** Les f_n sont des fonctions définies sur $]a;b[$, et $l \in\ ]a;b[$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $]a;b[$ vers une fonction f continue en l.
   Montrer que si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$.

16. **Théorème de Riemann-Lebesgue** Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ à valeurs dans un $\mathbb{C}$-espace de Banach. Montrer que :
   $$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \xrightarrow[\lambda \text{ réel } \to\infty]{} 0$$

17. **Familles sommables** Donner une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la famille $\left(\frac{1}{(|k|+|l|)^\alpha}\right)_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ soit sommable.