Séries entières

1. **D'Alembert-DL** Etudier le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_n = \ln\left(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$. — ENSI 97

2. **D'Alembert-Dérivation** Etudier le domaine de convergence de la série entière $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ et expliciter $g(x)$. — ENSI 97

3. **Classique !** Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$. — ENSI 97

4. **Dérivation** Développer la fonction $f : x \mapsto Arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)$ en série entière au voisinage de 0, et déterminer le rayon de convergence de la série trouvée. — ENSI 97

5. **Définition du rayon** Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où a_n est la n-ème décimale de π.

6. **Définition du rayon** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de complexes non nuls. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence R non nul (mais R peut être infini), et on note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{a_n} x^n$.
   Montrer que $RR' \leq 1$.

7. **Définition du rayon-Fractions rationnelles** Soit $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum Tr\left(A^n\right) z^n$.

8. **Equadiff+DSE** Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$.

9. **Equadiff+DSE**
   Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - 2ty' + \lambda y = 0$ admet-t-elle des solutions polynômiales ?

10. **Interversion $\sum / \int$** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ où $a_n = \frac{1}{n!}\int_1^{\sqrt{3}} (\ln(t))^n\, dt$.

11. **Interversion $\sum / \int$-Ellipse** On fixe $a > 0$. Pour $x \in]-1;1[$, on note $L(x)$ la longueur d'une ellipse de grand axe $2a$ et d'excentricité $|x|$. Montrer que L est développable en série entière et calculer les coefficients. — Centrale

12. **Interversion** $\sum/\int$ Déterminer la partie principale quand $n \to +\infty$ de $\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

13. **CVD** Soit $f \in \mathcal{C}^1([0.1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$.
On pose $a_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ dans le disque de convergence.

14. **Relation de récurrence** On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq 2^{n+1} - 1$ et en déduire une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$. Calculer la somme de la série. Exprimer les u_n.