

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

1. "Somme de Riemann"

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application telle que $\frac{\varphi(n)}{n} \xrightarrow{+\infty} l \in \mathbb{R}^+$. On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{\varphi(n)} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge et trouver sa limite.

2. Primitive/dérivée Soit $f :]\alpha; \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle. Montrer que :

$$\forall \lambda \in]0; 1[, \exists a < b \in]\alpha; \beta[/ \left(\int_a^b f \right)^2 > \lambda(b-a) \int_a^b f^2$$

3. Somme de Riemann Déterminer la limite de

$$\frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2)^{1/n}$$

4. Dérivabilité automatique-Equation fonctionnelle Trouver toutes les applications continues $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$\forall y \in]0; +\infty[, \int_x^{xy} f$ soit indépendante de x lorsque x décrit $]0; +\infty[$.

5. Dérivabilité automatique-Equation fonctionnelle

Soit $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = 1 + \int_0^x f(t)^2 dt$.

Montrer que $\forall x \in]-1; 1[, f(x) \neq 0$, et en déduire f .

6. IPP Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0) = f'(1) = 0$. Montrer que

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{3} \sup_{[0;1]} |f''|$$

et étudier le cas d'égalité.

7. Taylor Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe \mathcal{C}^∞ . On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ admettant au moins un zéro réel tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$$

Montrer que $f = 0$.

8. **Somme de Riemann** Pour $|z| \neq 1$, calculer $I(z) = \int_0^{2\pi} \ln |z - e^{i\theta}| d\theta$.

9. **Parité** Calculer :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x^2 + 1} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx$$