Préparation à l'agrégation — Université de Provence
Analyse complexe — 2006-2007

Théorème d'Abel

Référence: Gourdon analyse.
Leçons: séries de nombres réels ou complexes, suites et séries de fonctions, exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries, convergence des séries entières, fonctions d'une variable complexe, interversion de limites.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$, qui converge en un point z_0 du cercle de convergence. Soit $\theta \in]-\pi/2; \pi/2[$ et

$$\Delta_\theta := \{z_0 - re^{i\phi} / \ |\phi| \leq |\theta| \text{ et } r \leq R\cos\theta\}.$$

1. Montrer que $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur Δ_θ (se ramener au cas $R = 1$ et $z_0 = 1$ par un changement de variable).
2. Montrer que
$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Delta_\theta}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n.$$
En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. *Application.* On suppose que les séries $\sum b_n$ et $\sum c_n$ sont *semi-convergentes*, c'est-à-dire convergentes mais pas absolument convergentes, et on pose $a_n = \sum_{k+l=n} b_k c_l$ le terme général de la série produit. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \right)$$
(introduire les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$).

1. Quitte à faire le changement de variable $z = z_0 w$, $w = z/z_0$, on peut supposer $R = 1$ et $z_0 = 1$. L'hypothèse devient donc: $\sum a_n$ converge. Notons $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$: alors $a_n = R_{n-1} - R_n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon'$ (où $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(1+1/\cos\theta)}$). Par

ailleurs, pour $q < p$ et $z \in \Delta_\theta$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=q+1}^{p} a_n z^n\right| &= \left|\sum_{n=q+1}^{p} (R_{n-1} - R_n) z^n\right| = \left|\sum_{n=q}^{p-1} R_n z^{n+1} - \sum_{n=q+1}^{p} R_n z^n\right| \\ &\leq \sum_{n=q+1}^{p-1} |R_n||z|^n|1-z| + |R_q||z|^{q+1} + |R_p||z|^p.\end{aligned}$$

Ainsi, $q \geq N$ entraîne

$$\forall z \in \Delta_\theta, \left|\sum_{n=q+1}^{p} a_n z^n\right| \leq \varepsilon' \left(|1-z| \sum_{n=q+1}^{p-1} |z|^n + 2\right) \leq \varepsilon' \left(\frac{|1-z|}{1-|z|} + 2\right).$$

Or pour tout $|z| < 1$ tel que $z = 1 - re^{i\phi}$:

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{r}{1-|1-re^{i\phi}|} = \frac{r(r+|1-re^{i\phi}|}{1-|1-re^{i\phi}|^2} = \frac{r(1+|z|)}{2r\cos\phi - r^2} \leq \frac{2}{2\cos\phi - r}.$$

Si de plus $z \in \Delta_\theta$, on peut majorer le dernier terme de la ligne précédente par $2/\cos\theta$. Remarquons que l'inégalité ainsi obtenue

$$|1-z| \sum_{n=q+1}^{p-1} |z|^n \leq \frac{2}{\cos\theta}$$

est encore vraie si $z = 1$. Finalement,

$$\operatorname*{Sup}_{\Delta_\theta} \left|\sum_{n=q+1}^{p} a_n z^n\right| \leq 2\varepsilon'(1 + 1/\cos\theta) = \varepsilon.$$

On a donc montré la convergence uniforme de la série sur Δ_θ.

2. Notons f la somme de la série: elle est définie sur $\{1\} \cup \{z/\ |z| < 1\}$. Puisque la série converge uniformément sur Δ_θ, la somme est continue sur Δ_θ: donc

$$f(z) \xrightarrow[z \to z_0,\, z \in \Delta_\theta]{} f(z_0).$$

Appliquons ce résultat à $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ($\sum a_n$ de rayon de convergence 1), et $z_0 = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n\right) = \lim_{x \to 1^-} (\operatorname{Arctan} x) = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

car la fonction Arctan est continue en 1. De plus, d'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge, et on vient de montrer que dans ce cas

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 1^n,$$

d'où la conclusion par unicité de la limite.

3. Considérons les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ de sommes respectives f, g et h. La série $\sum b_n = \sum b_n 1^n$ n'étant pas absolument convergente, son rayon de convergence est inférieur ou égal à 1 (le point 1 est à l'extérieur du disque ouvert de convergence); et comme elle converge, ce rayon est supérieur ou égal à 1 (le point 1 est dans le disque fermé de convergence). Finalement $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence 1, et de même pour $\sum c_n z^n$.
   Soit $|z| < 1$: les séries $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont absolument convergentes, donc

$$g(z)h(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k+l=n} b_k c_l\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

   En particulier, la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1. Si $R > 1$, la somme f est continue en 1. Et si $R = 1$, puisque par hypothèse $\sum a_n$ converge, on peut appliquer le résultat de la question précédente. Dans les deux cas,

$$g(x)h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

   De plus, la question 2. montre que $g(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ et $h(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, ce qui donne le résultat.

Remarque: *attention, pas de réciproque! La série* $\sum(-1)^n z^n$ *diverge dès que* $|z| = 1$, *mais* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ *a une limite quand* $z \to 1$.