Préparation à l'agrégation — Université de Provence
Analyse complexe — 2006-2007

Fonction de Weierstrass

Référence: CHL2, Cartan.
Leçons: suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes.

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un réseau du plan complexe. On dit que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est elliptique pour Λ si f est méromorphe et admet Λ comme réseau de périodes:

$$\forall \omega = k_1 e_1 + i k_2 e_2 \in \Lambda,\ \forall z \in \mathbb{C},\ f(z+\omega) = f(z).$$

1. On suppose f elliptique pour Λ.
   (a) Montrer que si f est holomorphe, elle est constante.
   (b) Montrer que f a autant de zéros que de pôles (modulo le réseau Λ).
2. On définit la fonction de Weierstrass:

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

   (a) Montrer que la famille $\left(\frac{1}{\omega^3}\right)_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}}$ est sommable.
   (b) On numérote les éléments de $\Lambda \setminus \{0\}$ de sorte que

$$|\omega_1| \leq \ldots \leq |\omega_n| \leq \ldots.$$

   Pour $r > 0$, on a donc $|\omega_n| \geq 2r$ pour tout n sauf un nombre fini $n_1, \ldots, n_k$. Montrer que sur $D(0,r)$, la fonction $\mathfrak{p}$ est méromorphe et ses pôles sont exactement les éléments ω_{n_j}.
   (c) En déduire que $\mathfrak{p}$ est elliptique pour Λ.

1. (a) Notons $\mathcal{P}$ le parallélogramme formé par $0, e_1, e_1+e_2, e_2$ (c'est un *domaine fondamental*). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z_0 \in \mathcal{P}$ tel que $z - z_0 \in \Lambda$: alors $f(z) = f(z_0)$. Par conséquent, f ne prend pas sur $\mathbb{C}$ d'autres valeurs que celles qu'elle prend sur le compact $\mathcal{P}$. Puisque la restriction de f à $\mathcal{P}$ est bornée, f est bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante (théorème de Liouville).
   (b) Les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe sont isolés. On peut donc supposer que $\partial\mathcal{P}$ ne contient ni pôle ni zéro de f. En effet, sinon, il suffit de considérer le parallélogramme translaté $\varepsilon + \mathcal{P}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, qui est encore un domaine fondamental. On sait alors que

$$(\textit{nombre de zéros dans } \mathcal{P}) - (\textit{nombre de pôles dans } \mathcal{P}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z.$$

La fonction $g := f'/f$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, elliptique pour Λ, donc prend les mêmes valeurs sur les côtés opposés du parallélogramme. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_{\partial\mathcal{P}} g(z)\mathrm{d}z = \int_{[0;e_1]} g(z)\mathrm{d}z + \int_{[e_1;e_1+e_2]} g(z)\mathrm{d}z + \int_{[e_1+e_2;e_2]} g(z)\mathrm{d}z + \int_{[e_2;0]} g(z)\mathrm{d}z$$

est nulle.

(a) Pour tout $n \geq 1$, on considère le parallélogramme

$$P_n := \{z = t_1e_1 + t_2e_2 / \operatorname{Sup}(|t_1|,|t_2|) = n\}.$$

Sur P_n, il y a exactement $8n$ points de Λ. Chacun de ces $8n$ points est à distance plus grande que αn de 0, où $\alpha = \min\{|z|/\ z \in P_1\}$ (en effet, P_n est l'image de P_1 par l'homothétie de rapport n).
Rappelons qu'*une famille* $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est* **sommable** *s'il existe* $M > 0$ *tel que pour toute partie finie* $K \subset A$, $\sum_{\alpha\in K} |u_\alpha| \leq M$ (attention à ne pas oublier le module dans la somme). Soit donc K une partie finie de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}$. Il existe n tel que $K \subset (P_1 \cup \ldots \cup P_n)$:

$$\sum_{\omega\in K} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\omega\in P_i} \frac{1}{|\omega|^3} \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{8n}{(\alpha n)^3} \leq \frac{8}{\alpha^3}\,\zeta(2),$$

d'où la conclusion.

(b) La fonction $\mathfrak{p}$ est définie par une série:

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum \left(\frac{1}{(z-\omega_n)^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right).$$

Pour $|z| \leq r$ et $n \notin \{n_1, \ldots, n_k\}$,

$$\left| \frac{1}{(z-\omega_n)^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right| = \left| \frac{2\omega_n z - z^2}{\omega_n^2(\omega_n - z)^2} \right| = \frac{|z(2 - z/\omega_n)|}{|\omega_n|^3 |1 - z/\omega_n|^2} \leq \frac{r \times 5/2}{|w_n|^3 \times 1/4} \leq \frac{10r}{|\omega_n^3|}.$$

Ainsi $\sum_{n\notin\{n_1,\ldots,n_k\}} \left(\frac{1}{(z-\omega_n)^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right)$ est une série de fonctions holomorphes sur $D(0,r)$, qui converge normalement vu la question précédente (théorème de comparaison des séries à termes positifs) *a fortiori* uniformément: d'après le théorème de Weierstrass, la somme est holomorphe sur $D(0,r)$, et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme. Sur $D(0,r)$:

$$\mathfrak{p} = (\textit{somme finie de fonctions méromorphes}) \ + \ \textit{fonction holomorphe}$$

est méromorphe, et ses pôles dans $D(0,r)$ sont exactement $\omega_{n_1}, \ldots, \omega_{n_k}$.

(c) Sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda$:

$$\mathfrak{p}'(z) = -2 \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

et on en déduit immédiatement que $\mathfrak{p}'$ est elliptique pour Λ. Pour montrer que $\mathfrak{p}$ est elliptique pour Λ, il suffit de montrer que

$$\forall i = 1{,}2,\ \forall z,\ \mathfrak{p}(z + e_i) = \mathfrak{p}(z).$$

Or $z \mapsto \mathfrak{p}(z + e_i) - \mathfrak{p}(z)$ est constante puisque sa dérivée est nulle, égale à sa valeur en $-e_i/2$ c'est-à-dire $\mathfrak{p}(e_i/2) - \mathfrak{p}(-e_i/2)$. Puisque par construction $\mathfrak{p}$ est paire, cette constante est bien nulle.

Remarque: *la fonction $\mathfrak{p}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, a pour pôles exactement les points de Λ et sa partie principale en $\omega_k \in \Lambda$ est $\frac{1}{(z-\omega_k)^2}$. Plus généralement, pour toute famille (P_k) de polynômes, on peut construire une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles exactement les points de Λ, et de partie principale en $\omega_k \in \Lambda$ valant $P_k\left(\frac{1}{z-\omega_k}\right)$. Le candidat naturel serait $\sum_k P_k\left(\frac{1}{z-\omega_k}\right)$, mais pour un problème de convergence la fonction cherchée sera en fait de la forme $\sum_k \left(P_k\left(\frac{1}{z-\omega_k}\right) - Q_k(z)\right)$, où les Q_k seront des polynômes. Dans le cas de la fonction de Weierstrass, $P_k(X) = X^2$ et $Q_k(X) = 1/\omega_k^2$.*