PROBLEMS IN ADDITIVE NUMBER THEORY

Melvyn Nathanson

Abstract.
A large part of additive number theory concerns sums of finite sets of integers. This talk will consider the analogous problems and results for sums of finite sets of lattice points, and related problems in convex geometry.

L'INDICE D'UNE APPLICATION DU CERCLE SUR LUI MÊME

Jean-Pierre Kahane

Abstract.
Brézis a trouvé une jolie formule donnant l'indice d'une application du cercle unité dans lui même en fonction des modules des coefficients de Laurent (ou de Fourier), sous une condition de régularité sur l'application. On a une formule du mme type, un peu plus gnrale, sous des conditions moins restrictives et ces conditions sont optimales. L'optimalité s'obtient en donnant une solution d'une équation fonctionnelle exotique sous forme d'une série trigonométrique lacunaire. Brézis a demandé si l'indice, pour une application continue, est bien déterminé par les modules des coefficients (peut-on "entendre" l'indice ?). Cela se traduit par une autre équation exotique, que je n'ai pas su traiter. La réponse est négative, comme l'ont montré Bourgain et Kozma, par un procédé tout autre, dont j'aurai du mal à donner une idée.

CAUSALITÉ ET ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Jean-François Burnol

Abstract.
Riemann et Einstein sont déjà très liés. L'étude de la fonction zêta est-elle destiné à renforcer encore leur amitié? Nous évoquerons quelques bribes d'information menant à cet espoir.

ON THE LITTLEWOOD PROBLEM MODULO A PRIME

Sergei Konyagin

Abstract.

Let p be a prime, and let $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ be a function with $\mathbb{E}f = 0$ and $\|\widehat{f}\|_1 \leq 1$. B. Green and the speaker has shown that

$$\min_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)| = O(\log p)^{-1/3+\epsilon}.$$

As an immediate consequence we get that if $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ is a set of cardinality $\lfloor p/2 \rfloor$ then $\sum_r |\widehat{1_A}(r)| \gg (\log p)^{1/3-\epsilon}$. This gives a result on a "mod p" analogue of Littlewood's well-known problem concerning the smallest possible L^1-norm of the Fourier transform of a set of n integers.

Recently the last estimate ahs been improved by T. Sanders to

$$\sum_r |\widehat{1_A}(r)| \gg (\log p)^{1/2-\epsilon}.$$

FAMILLES ORTHONORMALES INFINIES DE $L^2(\mathbb{R})$

Anne de Roton

Abstract.

Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille orthonormale infinie de $L^2(\mathbb{Z})$.

Nous cherchons à dominer au mieux simultanément les fonctions g_n et leurs transformées de Fourier $\widehat{g_n}$.

Nous examinons donc des fonctions G_1 et G_2 telles que

$$\begin{cases} g_n(x) \ll G_1(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ \widehat{g_n}(t) \ll G_2(t) & (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

uniformément pour $n \in \mathbb{Z}$.

D'après un résultat de H.S. Shapiro, les fonctions G_1 et G_2 ne peuvent appartenir toutes les deux à $L^2(\mathbb{R})$.

Nous démontrons la conjecture de H.S. Shapiro selon laquelle il existe une base orthonormale $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $G_1(x) = G_2(x) = 1/\sqrt{1+|x|}$ et nous examinons d'autres questions corrélatives à ce problème :

- Si l'on conserve la majoration $G_2(t) = 1/\sqrt{1+|t|}$ pour les fonctions $\widehat{g_n}(t)$, quelle décroissance maximale peut-on espérer obtenir pour la fonction G_1?

- La majoration $G_1(x) = G_2(x) = 1/\sqrt{1+|x|}$ est-elle optimale?

-Si elle ne l'est pas, dans quelle mesure peut-on encore s'approcher de $L^2(\mathbb{R})$?

Travail en collaboration avec Bahman Saffari, Harold S. Shapiro et Gérald Tenenbaum.

ARITHMETIC PROGRESSIONS IN SUBSETS OF SQUARES

Imre Ruzsa

Abstract.

How many can we select from the first n squares without a three-term arithmetic progression? Call it $F(n)$. We conjecture that $F(n)/n$ tends to 0. We know that if it indeed does, it does so very slowly: $F(n) >> n/\log\log n$.

Joint work with Ben Green and Katalin Gyarmati.

MULTIPLE ERGODIC AVERAGES ALONG POLYNOMIALS

Bryna Kra

Abstract.

Szemeredi's Theorem on arithmetic progressions states that any set of positive upper density contains arithmetic progressions of arbitrary length. Furstenberg gave a new proof of this using multiple ergodic averages and this gave birth to the field of ergodic Ramsey Theory. I will discuss recent results on multiple averages, focusing on generalizations to polynomial averages and the combinatorial consequences of these results.

RÉPARTITION DE LA SOMME DES CHIFFRES DES NOMBRES PREMIERS

Joël Rivat

Abstract.

Nous allons répondre à une question posée par Gelfond en 1968 en montrant que la somme des chiffres des nombres premiers écrits en base $q \geq 2$ est équirépartie dans les progressions arithmétiques. Nous montrerons également que la suite $(\alpha s_q(p))$ o p décrit l'ensemble des nombres premiers est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

VINOGRADOV'S SERIES IN HARMONIC ANALYSIS AND PDE

Konstantin Oskolkov

Abstract.
In the talk, the properties of trigonometric series with the polynomial phase in the oscillatory exponentials (Vinogradov's series) will be discussed. Such series have numerous applications in: 1) analytic number theory; 2) spectral problems of harmonic analysis; 3) partial differential equations of Schroedinger type; 4) quantum optics (Talbot's effect).

LARGE SIEVE FOR SQUARE MODULI

Liangyi Zhao

Abstract.
In a recent joint work with S. Baier, we were able to improve the large sieve inequality for square moduli. The result is better, in certain ranges, than all previously known results which were obtained both independently and jointly by Baier and myself. I shall speak about the history, heuristics and conjectures about this problem and the techniques that enabled us to obtain the new result. I will also mention applications of results of this type.

SUR LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES PREMIERS

Michel Balazard

Abstract.
Il s'agit de remarques variées inspirées par la lecture de démonstrations élémentaires du théorème des nombres premiers.

FROM DIOPHANTINE APPROXIMATIONS TO TANGENTIAL FATOU PROPERTY

Alexander Stokolos

Abstract.

The classical Littlewood's counter-example to the tangential Fatou theorem is based on a Diophantine approximation estimate due to Khintchine. This result of Littlewood initiated studies of the boundary behavior of harmonic and analytic functions along various approach paths.

We consider bounded harmonic and analytic functions defined on the unit disc and study their boundary behavior along tangential approach region whose shape may change from point to point. We prove sharpness of Shon's tangential approach regions and solve a problem posed by W.Rudin in 1979 thus completing the picture given by the classical theorems of Fatou (1906), Lindeloef (1915), Littlewood (1927), and Nagel& Stein (1984).

The talk is based on two articles, one joint with Fausto di Biase, Olof Svensson, Tomasz Weiss, and the other with Kathryn Hare.

MOMENTS DE POLYNÔMES DE RUDIN-SHAPIRO

Laurent Habsieger

Abstract. We know from Littlewood that the moments of order 4 of the Rudin-Shapiro polynomials $P_n(z)$ satisfy a linear recurrence of degree 2. Recently, Doche and Habsieger have developped a new approach, which enables to compute exactly all the moments $\mathcal{M}_q(P_n)$ of even order for $q \leq 32$, and to check a conjecture on the asymptotic behavior of $\mathcal{M}_q(P_n)$ for q even and $q \leq 52$. More precisely, it is conjectured that

$$\mathcal{M}_q(P_n) \sim \frac{2^{(n+1)q/2}}{q/2+1}\,.$$

Now, for every integer $\ell \geq 2$ there exists a sequence of generalized Rudin-Shapiro polynomials, denoted by $P_{0,n}^{(\ell)}(z)$. The classical case corresponds to the choice $\ell = 2$. The previous method for computing moments extends to these polynomials. For instance, Doche have completely determined the moments $\mathcal{M}_q(P_{0,n}^{(3)})$ for $q = 4, 6, 8, 10$. He also formulated a natural conjecture which implies that

$$\mathcal{M}_q(P_{0,n}^{(\ell)}) \sim \frac{\ell^{(n+1)q/2}}{\binom{q/2+\ell-1}{2}}\,.$$