LES CARRÉS MAGIQUES DE NĀRĀYAṆA

de la belle algorithmique débranchée

le 9 mars 2018

Les arrangements de nombres en forme de carré, de façon que les sommes dans chacune des rangées horizontales et verticales ainsi que dans les deux diagonales soient égales, sont connus depuis les temps anciens dans diverses civilisations. Ils ont été des symboles philosophiques et des talismans importants dans les contextes d'alchimie, de médecine, d'astronomie et de divination.

Un peu d'histoire

La première attestation écrite semblerait venir de Chine autour du Ier siècle et représente un carré de trois chiffres par côté. Au cours des siècles, on trouve des carrés dans les mondes arabe, chinois, indien et occidental. Parmi les exemples connus, on mentionne l'inscription

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

dans le célèbre temple de Khajuraho, accompagnée d'une phrase souhaitant la victoire à un prince…

Figure 1 : Pārśvanātha Temple des environs du XIe siècle

On trouve des exemples d'usage historique semblable dans des mondes pourtant géographiquement éloignés. Dans *Siddhayoga* du IXe siècle, un des plus anciens compendium sanskrits d'āyurveda, *Vṛnda* prescrit les tableaux eutociques *(https://fr.wiktionary.org/wiki/eutocique)* construits avec des nombres tels qu'on retrouve la somme trente et le diagramme ci-dessous,

16	6	8
2	10	18
12	14	4

accompagné d'autres rituels comme la récitation de mantras, pour soutenir les femmes en travail, se trouve explicitement dans les gloses. Ces carrés se trouvent également en contexte obstétrique dans les textes médicaux arabes comme *Firdaus al-ḥikma* de *Alī al-Tabarī* de la même époque. Dans **de Occultâ Philosophiâ** d' *Agrippa von Nettesheim* du XVIe siècle, une telle figure, inscrite en plomb, représente Saturne, et a un usage similaire.

Un carré non-numerique, d'origine romaine, très repandu dans l'occident medieval, contenant le palindrome "sator arepo tenet opera rotas" a été paraillement associé à l'accouchement. Les historiens n'ont pas encore retracé le trajet d'idées eventuelles !

Parmi les apparitions textuelles les plus anciennes, Takao Hayashi en 1987 a reconstruit un diagramme de 16 cellules exprimant les formules de parfums de seize substances avec leurs proportions prescrites dans *Bṛhatsaṃhitā*, un ouvrage encyclopédique écrit par *Varāhamihira* au VIe siècle .

Continuant des exemples remarquables de textes sanskrits, on peut citer des manuscrits tantriques qui contiennent des tels diagramme numériques, comme le célèbre *Śivatāṇḍava* ou nous retrouvons un dialogue entre *Śiva* et *Pārvatī* sur les mérites du *yantraṃ pañcadaśākhyam* (diagramme de somme quinze), qui fait l'homme *sarvavajayin* (triompher de tout) .

Compte tenu de leur présence de si longue date, il est fort probable que les méthodes de constructions de ces diagrames ont été connues et transmises oralement longtemps avant l'époque de l'apparition des traces écrites, car une traitement mathématique de ces figures ne semble apparaître qu'autour du XIIIe siècle dans les textes sanskrits ou arabes et encore plus tard en Europe. Selon certains anthropologues, une raison peut être le caractère talismanique qui interdisait les transmissions généralisées.

Il est intéressant de noter que les textes orientaux n'utilisent pas l'expression « carré magique » qui est une appellation occidentale et pourrait venir de la Loubère qui au XVIIe siècle, dans *Le probleme des quarrés magiques selon les Indiens* dit :

> On appelle ce Problème les quarrés magiques parce qu'Agrippa dans son second Livre **de Occultâ Philosophiâ**, chap.22, nous apprend qu'on s'en est servi comme de Talismans..... ayant parû assez merveilleuse aux ignorants, pour en attribuer l'invention à des esprits supérieurs à l'homme.

Parmi les premiers textes mathématiques connus sur le sujet, on remarque particulièrement le Gaṇitakaumudī (Éclaircissement de mathématiques), écrit par Nārāyaṇa en 1356, où le dernier chapitre est dédié entièrement à ce sujet. Bien que ce texte s'inscrive dans la tradition sanskrite appelée *pāṭīgaṇita* (arithmétique et géométrie), poursuivie notamment par *Śrīdhara* au VIIIe siècle, *Mahāvīra* et *Śrīpati* au IXe ainsi que *Bhāskara* au XIIe siècle, il est le seul à traiter le sujet de tels diagrammes. Cependant, dans un texte mathématique en prakrit, *Gaṇitasārakaumudī*, écrit au début du XIVe siècle, *Ṭhakkura Pherū* discute ces carrés brièvement.

La motivation de Nārāyaṇa, expliquée dans les deux premiers vers du chapitre, est purement mathématique et l'auteur se plonge dans

> ces bonnes mathématiques, liées aux suites,... pour surprendre les bons mathématiciens, plaire à ceux qui connaissent les diagrammes et afin de chasser l'arrogance des mauvais mathématiciens.

Il définit des termes techniques et décrit plusieurs méthodes de construction de *bhadra* (carré magique, littéralement « propice ») surtout de 16 cellules et curieusement n'insiste pas sur des carrés de 9 éléments.

Le cavalier dans les carrés 4x4

Maintenant j'élabore un peu la méthode remarquable de saut de cavalier d'échecs pour engendrer les carrés magiques de 16 éléments qu'on appelle d'ordre 4. Le langage des mouvements dans l'échiquier a aussi été employé pour le remplissage des carrés magiques arabes (voir par exemple *Chabrāmallisī*) : ceux du cavalier, *faras* comme *turaga* en sanskrit, mais aussi de la dame, *firzān*, qui passe à la case voisine diagonalement et du fou *fīl* qui se déplace de deux cases en diagonale. Pourtant, j'ignore si la construction explicite et le comptage de Nārāyaṇa se trouvent dans un texte arabe.

Tout l' algorithme est donné en un *śloka* [1 *(#nb1)*] (strophe), et comme souvent dans les *sūtra* (règles), condensés en vers destinées à être apprises par coeur, la description semble énigmatique à première vue :

> *Mettez deux par deux les nombres obtenus d'une suite, utilisant les mouvements d'un cavalier dans un jeu d'échecs, en ordre descendant et ascendant, et deux [autres] dans les cellules unies et les cellules distancées par une place, [ou] il faut remplir les cellules par les mouvements du cheval à droite et à gauche.*

En fait, cet algorithme engendre tous les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4, c'est-à-dire où les sommes dans les diagonales brisées sont également constantes, avec une suite en progression arithmétique choisie.

> *Les sommes des nombres des cellules placées en horizontale, verticale et diagonale, mesurées séparément, deviennent égales.*

L’auteur n’utilise aucun mot particulier pour « pandiagonale » pour le résultat de son algorithme mais la forme *karṇa-gānāṃ*, génitif pluriel plutôt que *gayoḥ* le duel, pour signaler plus que deux diagonales.

Ses exemples et l’énumération qui suit sont cohérents. L’algorithme ne demande pas de calcul et peut être appliqué mécaniquement. Alors, il mérite d’être bien décodé par des commentaires contemporains [2 *(#nb2)*].

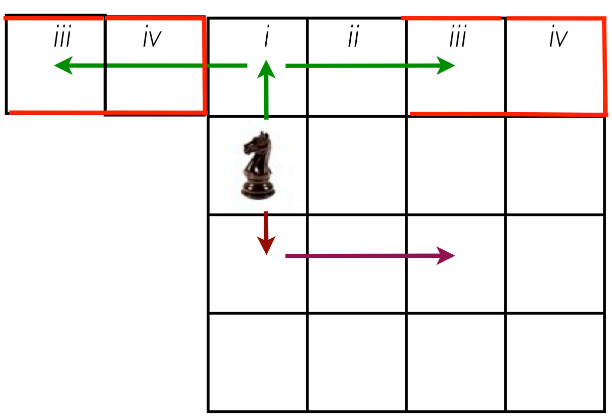
D’abord, il faut comprendre qu’un carré se replie sur lui-même comme une tore et pour maintenir la taille prescrite du carré, les bords droit et gauche coïncident comme en Figure 2 (a) ainsi que ceux du haut et du bas, Figure 2 (b). Ainsi, deux mouvements successifs horizontaux dans la même direction s’équivalent, qu’ils soient faits à gauche ou à droite, on le notera $\boldsymbol{h} = \leftarrow\leftarrow = \rightarrow\rightarrow$, de même verticalement, qu’on notera $\boldsymbol{v} = \begin{smallmatrix}\downarrow\\\downarrow\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}\uparrow\\\uparrow\end{smallmatrix}$.

Un cavalier peut se déplacer de deux manières distinctes, équivalentes à une rotation d’un quart de tour près :

1. Une cellule verticalement et deux cellules horizontalement dont il y a deux formes possible ; ascendante $\boldsymbol{A} = \begin{smallmatrix} & \rightarrow\rightarrow \\ \uparrow & \end{smallmatrix}$ ou descendante $\boldsymbol{D} = \begin{smallmatrix} \downarrow & \\ & \rightarrow\rightarrow \end{smallmatrix}$ dans la Figure 2 (a).

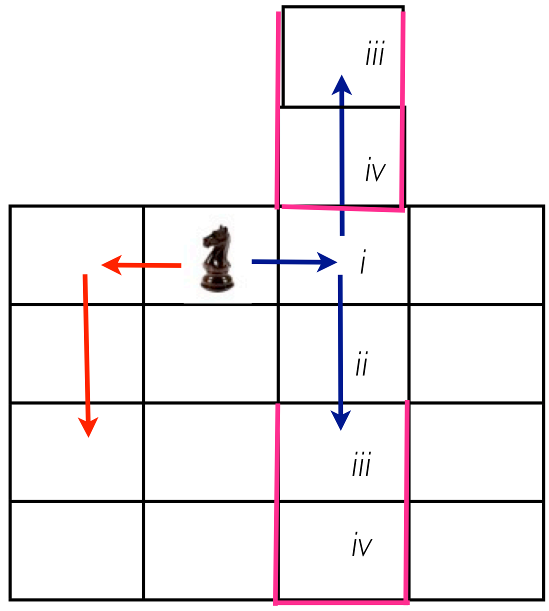
2. Une cellule horizontalement et deux verticalement, indiqués en bleu $\boldsymbol{R} = \begin{smallmatrix} \rightarrow & \downarrow \\ & \downarrow \end{smallmatrix}$ ou rouge $\boldsymbol{L} = \begin{smallmatrix} \downarrow & \leftarrow \\ \downarrow & \end{smallmatrix}$, pour *rectus* et *laevus*, en Figure 2 (b) .

Grâce au pliage sur soi-même, la direction des mouvements répétés, n’est pas importante. Un carré magique est construit à partir d’un seul type de saut de cavalier A, D, L ou R : une fois partis, les mouvements progressent toujours dans la même direction pour un quart donné.



(a) *ascendant* - *descendant*

Figure 2



(b) gauche - droite

Figure 2

L’algorithme décrypté

Nous utilisons la suite générique {1,2, ... , 16} , contenants 4 *pada* (quart) {1,...,4} jusqu’à { 13,...,16} pour décrire le remplissage. Les mouvements pour {1,2,3,4} étant choisis, les trois autres suivront ensuite, suivant le même principe, démarrant dans une case évitant les précédentes : 1, 5, 9, 13 ne seront ni dans les mêmes lignes ni dans les mêmes colonnes.

Voyons pour le premier quart, selon l’algorithme de Nārāyaṇa, il y aura donc un saut de cavalier entre 1 et 2 puis entre 3 et 4. Le mouvement entre 2 et 3 sera d’un autre type, appelons-le « non-cavalier ». Il se fera dans la même direction et, ou bien dans les cellules unies par la diagonale, ou bien dans les cellules distancées par une place (c’est-à-dire un mouvement $\boldsymbol{h}$ ou $\boldsymbol{v}$).

Pour les mouvements non-cavaliers sur la diagonale, notons par α, δ, ρ, λ les directions respectivement ascendante, descendante, à droite et à gauche qu’on choisit.

Ces mouvements servent à mettre les éléments d’un quart d’une suite dans les lignes et colonnes différentes, augmentant chaque fois d’une unité dans la direction de progression. Les troisième et quatrième quarts reviendront ensuite en sens inverse pour équilibrer cette somme.

Analysons maintenant comment le carré magique de Khajuraho est construit par la méthode de Nārāyaṇa.

Le carré magique de Khajuraho

Dans cet exemple, nous fixons arbitrairement la cellule de départ à la ligne 1 et colonne 3 et choisissons D, la direction *descendante* comme le premier mouvement du cavalier. Tous les mouvements au cours d’une étape suivront le même sens que son premier mouvement du cavalier, ici, descendant.

La marche de cavalier D partant de la cellule du chiffre 1, définit ainsi la cellule où mettre le chiffre 2.

Le déplacement entre 2 et 3 devra également être descendant et il y aura trois choix valables, d'une cellule par les deux diagonales descendantes, λ et ρ, ou bien verticalement de deux cases, v. Nous choisissons la diagonale droite ρ ;.

		1↓	
2↘	←	←	
	3_ρ		3_λ
3_v			

Ensuite le cavalier, toujours descendant, doit partir de 3 pour arriver à 4 sans aucun choix, c'est un mouvement D.

La première étape est donc décrite par DρD.

Le deuxième quart commencera dans une cellule *adjacente* à la fin du premier. Ainsi, pour le chiffre 5 il y a deux possibilités : *ascendante*=a ou *droite*=r pour ne pas le mettre dans la même ligne ou la même colonne que le chiffre 1.

Ce décalage des étapes a pour but la somme constante des lignes et colonnes. Dans la construction du carré magique de Khajuraho nous choisissons la marche ascendante.

		1	
2			
	3↓		5_a
5_r	→	→	4

La deuxième partie, c'est-à-dire les chiffres 5,6,7 et 8 suivront le sens *descendant* comme le premier quart, mais la partie non-cavalier, entre les chiffres 6 et 7 sera choisie à *gauche* λ. La moitié du carré est donc codée par les mouvements DρD a DλD.

La seconde moitié du remplissage est automatique, il suffit de placer, pour chaque nombre de la première moitié, son complémentaire à 17 dans la case obtenue par le mouvement $\hbar v$, c'est-à-dire deux déplacements horizontaux et deux déplacements verticaux, ce qui va garantir la somme constante des 6 diagonales voulue dans un tel carré magique.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Le codage suit donc le processus en sens *inverse*, soit AρA pour le troisième quart, d pour le mouvement non-cavalier, et ensuite AλA.

On vérifie facilement que le carré obtenu est pandiagonal par les sommes dans des diagonales brisées : $(16+6)+(1+11)=(12+8+5)+9=\ldots=34$.

Autre exemple : le carré d'al-Būnī

Le célèbre carré magique pandiagonale arabe d' *al-Būnī* et d'autres du XIIIe siècle,

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

se construit en plaçant 1 dans le coin supérieur droit et en suivant le chemin DλD pour le premier quart, ℓ pour placer le 5. Par conséquent, les trois étapes restantes sont AλA Dϱ D r Aϱ A. Ce carré peut être obtenu par une rotation de 90 degrés de ceux reconstruits par Hayashi, engendré par la formule commençant par LαL a avec le coin inférieur de droite comme cellule de départ.

Dénombrement : Combien y-en-a-t-il ?

Par ailleurs Nārāyaṇa évoque une question arithmétique qui n'a été retrouvée dans aucun autre texte d'époque : Combien de carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4, remplis des chiffres 1 à 16, peuvent-ils être obtenus ? Cette question demande de bien maîtriser tous les choix opérés lors de l'exécution de l'algorithme.

Avec la place du chiffre 1 et la marche du cavalier fixés pour commencer, il y a trois choix pour décider le mouvement non-cavalier et finalement deux pour la transition. Alors correspondant à chaque marche du cavalier il y a six possibilités de remplissage du carré. Partons, par exemple, avec le mouvement descendant du cavalier, dont nous avons vu les exemples Dϱ D a, Dλ Dℓ et D$\boldsymbol{v}$A r.

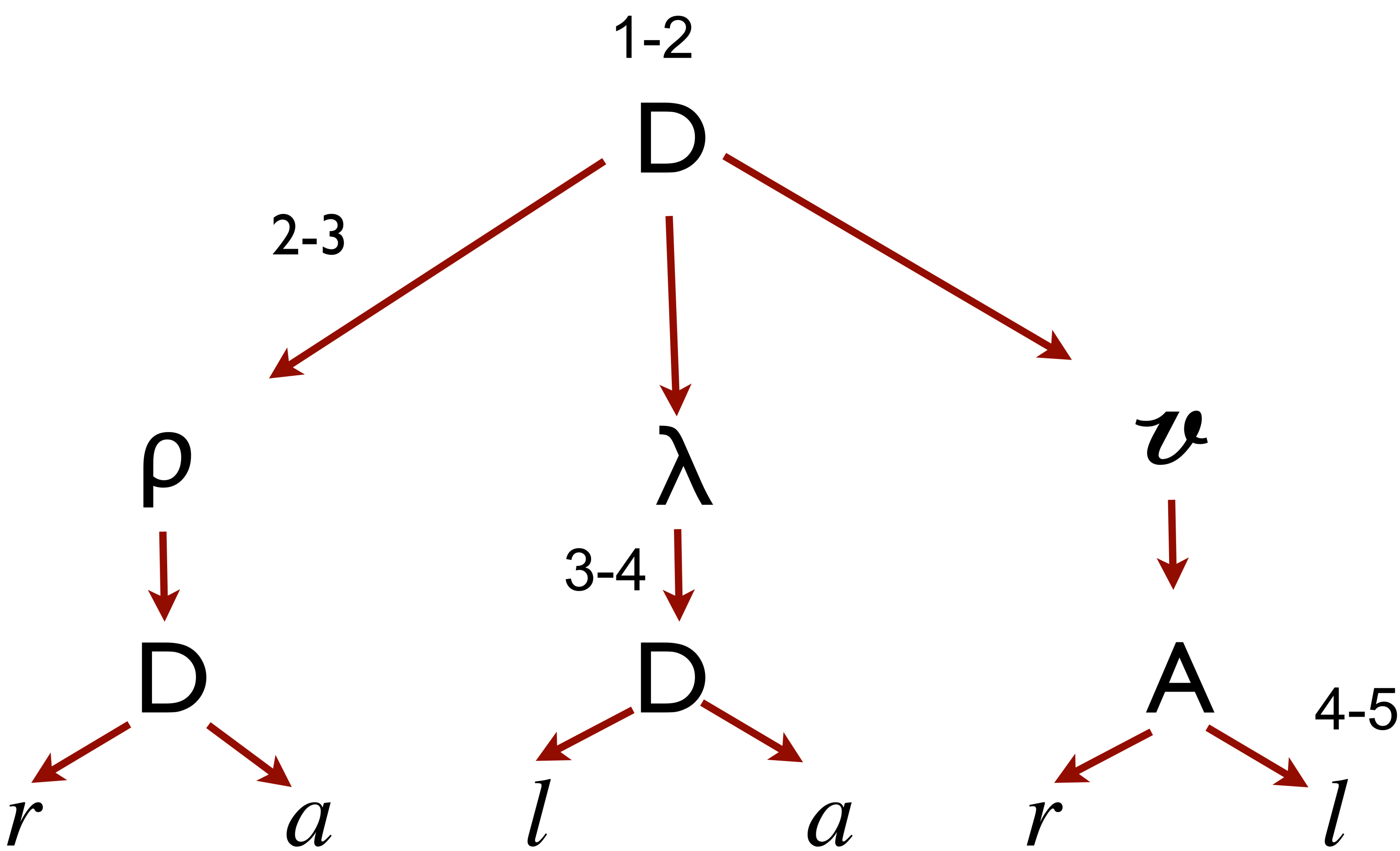


Figure 3 : Premier mouvement cavalier descendant

Mais c'est un parmi les quatre choix de marche de départ et nous arrivons à 24 possibilités pour une place de départ donnée !

Dans Gaṇitakaumudī, ce résultat final est cité comme une règle et les 24 possibilités contenant les entiers 1 à 16 avec le chiffre 1 dans la cellule du coin supérieur gauche sont ensuite explicitement illustrées.

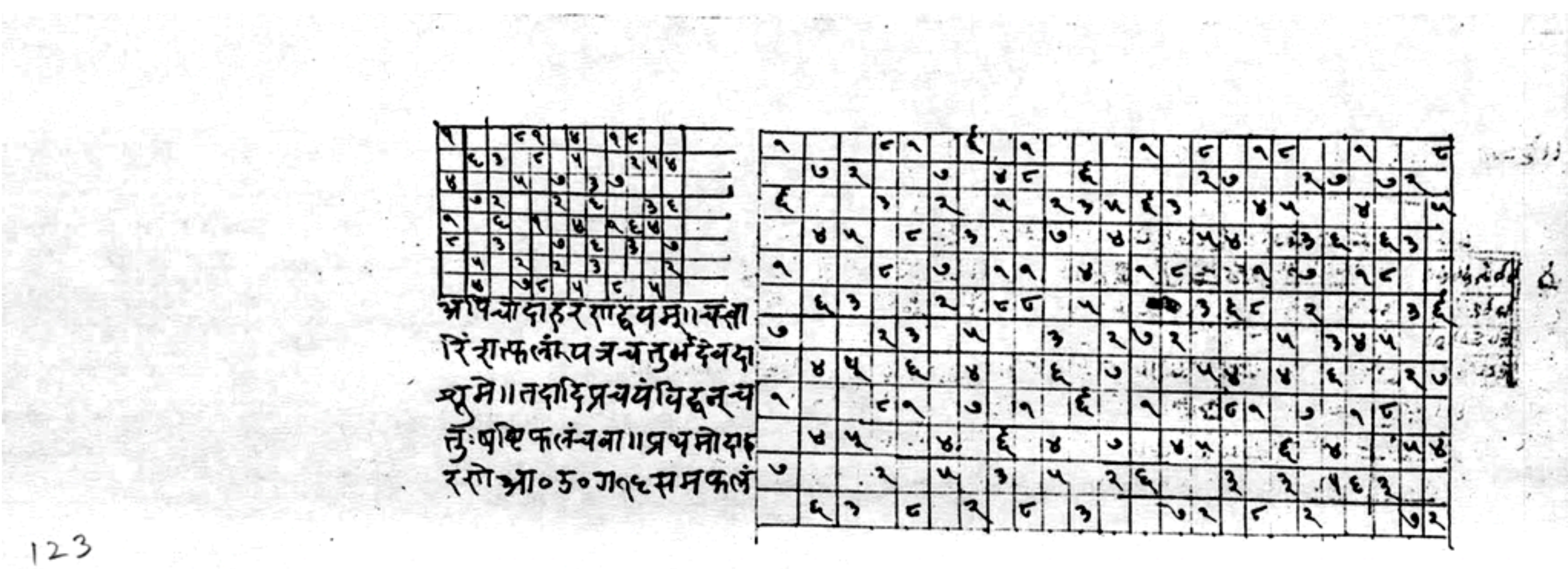


Figure 4 : Les 24 possibilités, Manuscrit 104595, Sarasvatī Bhavan, Vārāṇasi

En remarquant enfin que n'importe quelle cellule peut servir de case de départ, le nombre total de carrés magiques pandiagonaux avec des entiers de 1 à 16 devient $24 \times 16 = 384$, ce qu'on trouve justement dans le texte *catur-aśīty-adhika-śata-traya* .

La combinatoire des carrés magiques d'ordre supérieur à 4 devient beaucoup plus difficile. Le nombre de carrés magiques pandiagonaux d'ordre 5 est 28800 et n'est toujours pas connu pour les cas supérieurs à 6.

Vous trouverez en attaché et en anglais, une preuve *(IMG/pdf/proofna_ra_yan_a.pdf)* que l'algorithme de Nārāyaṇa fonctionne, qu'il donne bien des carrés magiques pandiagonaux et tous les carrés magiques pandiagonaux.

NOTES

[1 *(#nh1)*] GK.14.10.11-a *caturaṅgaturagagatyā dvau dvau śreḍhīsamudbhavāv aṅkau/*
nyasya kramotkrameṇa ca koṣṭhaikyaikāntareṇa ca
tau/ savyāsavyaturaṅgamarītyā koṣṭhān prapūrayed aṅkaiḥ/

[2 (#nh2)] Pour les détails d'algorithme et les références contactez l'auteure.