5/02/2021

L-fonctions p-adiques

Soit $n \in \mathbb{N}$, un caractère de Dirichlet modulo n est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ dans $\mathbb{Q}^{alg}$. Si $m|n$, et χ est un caractère de Dirichlet mod m on considère la projection

$$\pi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*.$$

Déf. Soit χ un car. de Dirichlet. χ est un conducteur f_χ (ou f) si quelque soit n diviseur de f, $n \neq f$, la restriction de χ au noyau de $\pi : (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ n'est pas triviale.

②

Déf. Soit χ un car. de Dir. mod f. Si $n \in \mathbb{Z}$, on définit la <u>somme de Gauss</u> $G(\chi, n)$ par

(ou τ) $\rightarrow$ $$G(\chi, n) = \sum_{a \bmod f_\chi} \chi(a)\, \zeta_{f_\chi}^{na}$$

où $\zeta_f = e^{2i\pi/f}$.

On pose $G(\chi) = G(1, \chi)$.

Remarque $\chi^{-1}(n) = \chi(n)^{-1}$ si $n \in \left(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}\right)^*$

$\chi(n) = 0$, $(n, f) \neq 1$

$$\chi^{-1}(n) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \chi(n)^{-1}, & \text{si } (n, f) = 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

③ <u>Prop</u> (i) $G(\chi, n) = \chi^{-1}(n)\, G(\chi)$

(ii) $G(\chi)\, G(\chi^{-1}) = \chi(-1) f$.

<u>Dém</u> Si $(n, f) = 1$, n est inversible dans $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$

$$G(\chi, n) = \sum_{a \bmod f} \chi(a) \zeta_f^{na} = \chi^{-1}(n) \cdot$$

$$\cdot \sum_a \chi(na) \zeta_n^{na} = \chi^{-1}(n)\, G(\chi).$$

Soit $(n, f) = d$, alors $f = df'$, $n = dn'$.

Soit U le noyau de la projection

$$(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/f'\mathbb{Z})^*$$

Soit S un système de représentants de $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$ dans $(\mathbb{Z}/f'\mathbb{Z})^*$. Alors

$$G = \sum_{a \in S} \sum_{u \in U} \chi(au) \zeta_f^{au}$$

$$= \sum_{a \in S} \chi(a) \zeta_f^{na} \underbrace{\left(\sum_{u \in U} \chi(u) \right)}_{= 0} = 0$$

(ii) $G(\chi)\,G(\chi^{-1})$

$$= \sum_{b \bmod f} \zeta_f^{b}\, \chi^{-1}(b)\, G(\chi)$$

$$= \sum_{b \bmod f} \zeta_f^{b} \sum_{a \bmod f} \chi(a)\, \zeta_f^{ab}$$

$$= \sum_a \chi(a) \underbrace{\sum_b \zeta_f^{(a+1)b}}_{} = \begin{cases} f & a=-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\square$

<u>Série L de conducteur f.</u>

<u>Def</u> Soit χ un car. de Dirichlet de cond. f. La série L attachée est

$$L(\chi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

$\in \mathbb{C}$.

$$= \prod_{p \text{ prem.}} \left(1 - \chi(p) p^{-s}\right)^{-1}$$

$\boxed{\chi = 1 \to \zeta(s)}$

<u>Def</u> La fn zêta de <u>Hurwitz</u> :

$$\zeta_H(s, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b+n)^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad 0 < b \leq 1$$

<u>Imp</u> $$L(\chi, s) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, f^{-s}\, \zeta(s, a/f).$$

⑤ <u>Thm</u> Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ à décroissance rapide à l'infini, alors

$$L(f,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(t)\, t^s \frac{dt}{t} \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $L(f,-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

<u>Rappel</u>

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1}\, t^s \frac{dt}{t}$$

<u>Dém</u> Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$.

$\phi \to 1$ sur $[0,1]$
$\phi \to 2$ sur $[2,\infty[$.

$$f = \phi f + (1-\phi) f.$$

$$L(f,s) = L(\phi f, s) + L((1-\phi)f, s)$$

Par Thm de Conv. Dominé :

$s \longmapsto \Gamma(s)\, L((1-\phi)f, s)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

6

Remplaçons f par ϕf, f support compact.

$$L((1-\phi)f, -n) = 0 \quad \left(\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0\right).$$

Intég. par partie,

$$L(f,-n) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty f^{(n+1)}(t)\,dt = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

et $L(f,s) = -L(f', s+1)$, $\mathrm{Re}\, s > 1$. $\square$

<u>Rappel 1</u> $\dfrac{1}{e^t-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ (Bernoulli)

<u>Generalisée</u> $\displaystyle\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\, t e^{at}}{e^{ft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!}$

<u>Rappel 2</u> $\dfrac{te^{tX}}{e^t-1} = \displaystyle\sum_n B_n(X) \frac{t^n}{n!}$

polynôme de B.

$$B_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i X^{n-i}.$$

Prop Soit $f \mid F$. Alors,

$$B_{n,\chi} = F^{n-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a) B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

Dém

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^{n-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a) B_n\left(\frac{a}{F}\right) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{a=1}^{F} \chi(a) \frac{t e^{(a/F)Ft}}{e^{Ft}-1}$$

Soit $\boxed{g = \frac{F}{f}}$, $\boxed{a = b + cf}$

$$\sum_{b=1}^{f} \sum_{c=0}^{g-1} \frac{\chi(b)\, t e^{(b+cf)t}}{e^{fgt}-1} = \sum_{b=1}^{f} \chi(b) \frac{t e^{bt}}{e^{ft}-1}$$

$$= \sum B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} \qquad \square$$

On va montré que

$$L(\chi, 1) = \frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{a=1}^{f} \chi^{-1}(a) \log_p\left(1 - \zeta_f^a\right)$$

$$G(\chi) = \sum_{a \bmod f} \chi(a) \zeta_f^a, \quad \zeta_f = e^{2\pi i/f}.$$

(8) Soit Δ le groupe des racines de l'unité contenues dans $\mathbb{Q}_p^*$. Alors Δ est gp. cyclique des racines $\phi(q)$-ième de l'unité.

$\mathbb{Z}_p^* = \bigsqcup (\epsilon + q\mathbb{Z}_p)$, $\epsilon \in \Delta$.

Soit $\omega : \mathbb{Z}_p \to \Delta \cup \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \omega(x) = 0 \\ x - \omega(x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \in p\mathbb{Z}_p \\ x \in \mathbb{Z}_p^* \end{array}$$

Rep. de Teichmüller

<u>Def</u>

$$\underbrace{\langle x \rangle}_{\in\ 1 + q\mathbb{Z}_p} = x\,\omega(x)^{-1}, \quad x \in \mathbb{Z}_p^*$$

9 Construction de fonctions L p-adiques

Soit $H(s,a,F) = \sum_{m \equiv a\,(F),\ m>0} m^{-s}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nF)^s} = F^{-s}\,\underbrace{\zeta\left(s, \frac{a}{F}\right)}_{\text{Hurwitz}}$$

$s \in \mathbb{C}$, $0 < a < F$, $n \in \mathbb{N}^*$

Alors $H(1-n, a, F) = -\dfrac{F^{n-1} B_n(a/F)}{n} \in \mathbb{Q}$

H a un pôle simple en $s=1$ de rés. $\frac{1}{F}$

Rappel (von Staudt–Clausen)

$$B_n + \sum_{(p-1)\mid n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

n : entier positif pair ; p : premier

- $pB_n \in \mathbb{Z}_p \quad \forall n, \forall p$

Thm Soit $f \mid F$ et $p \nmid a$. Alors il existe une fonction p-adique méromorphe $H_p(s,a,F)$ sur

$$\{x \in \mathbb{C}_p : |x| < \underbrace{q p^{-1/(p-1)}}_{>1}\}$$

$\mathbb{C}_p$: complété de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (pour la norme p-ad)

t.q. $H_p(1-n, a, F) = H(1-n, a, F)$

si $n \equiv 0 \mod \phi(q)$.

(10)

Dém

Soit $H_p(s,a,F) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{F}\langle a\rangle^{1-s}$.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{1-s}{j} B_j\left(\frac{F}{a}\right)^j$$

$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots}{n!}$ polynôme de degré n. x entier $\Rightarrow \binom{x}{n}$ est un coeff. binomial

Convergence (Von Sfandt Clausen)

$$|B_j(F/a)^j| \leq p\,|q|^j$$

Avec $r = |q| = \frac{1}{q}$, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{s}{j} B_j\left(\frac{F}{a}\right)^j$$

est analytique sur $D = \{|1-s| < \varepsilon p^{-1/p-1}\}$

$s \in \mathbb{C}_p$

$(1-s)H_p(s,a,F)$ est analytique sur D.

$$H_p(1-n,a,F) = -\frac{1}{nF}\langle a\rangle \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} B_j\left(\frac{F}{a}\right)^j.$$

$$= -\frac{1}{n}F^{n-1}\omega^{-n}(a)B_n(a/F), \quad n \geq 1$$

Quand $s=1$

résidu : $\frac{1}{F}\langle a\rangle \sum_{j=0}^{\infty}\binom{0}{j}B_j\left(\frac{F}{a}\right)^j = \frac{1}{F}$.

$\square$