19 fév. 2021

Nous utilisons la transformée de Mellin pour construire la L-fonction p-adique. Mais d'abord nous avons besoin d'une transformée pour lier les distributions et les fonctions analytiques.

Déf Soit μ une distribution continue de $\mathbb{Z}_p$. La transformée d'Amice, Mahler ou la transformée de μ est la série formelle :

$$A_\mu(T) = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T^n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} \mu(x).$$

Rappelons que $L(\chi, s) = \sum \chi(n)/n^s$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et $L(\chi, -n) = (-1)^n \dots^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Si f est le conducteur de χ,

$$L(\chi, s) = \frac{1}{G(\chi^{-1})} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{b \bmod f} \frac{\chi^{-1}(b)\, t^{s-1}}{\delta_f^{-b} e^t - 1} dt$$

$G(\chi^{-1})$: somme de Gauss

$\delta_f = e^{2i\pi/f}$

② Alors $L(\chi, -n) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{L}_\chi(t)\Big|_{t=0}$

où $\mathcal{L}_\chi(t) = -\frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod f} \frac{\chi^{-1}(b)}{\delta_f^b e^t - 1}$.

Si $(f, p) = 1$ et la série entière

$$F_\chi(T) = -\frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod f} \frac{\chi^{-1}(b)}{(1+T)\delta_f^b - 1}$$

est la transformée d'Amice d'une mesure μ_χ sur $\mathbb{Z}_p$ dont la transformée de Laplace est $F_\chi(e^t - 1) = \mathcal{L}_\chi(t)$.

Alors, $\int_{\mathbb{Z}_p} z^n \mu_\chi = \mathcal{L}_\chi^{(n)}(0) = L(\chi, -n)$.

Construisons la fonction L p-adique.

Déf La fonction-L p-adique associée à χ est la transformée de Mellin de μ_χ et on note cette fonction $\beta \longrightarrow L_p(\chi \otimes \beta)$. Si β est un caractère localement analytique sur $\mathbb{Z}_p^*$, nous avons

③

$$L_p(\chi \otimes \beta) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \beta(x)\mu_\chi(x).$$

De plus, si $i \in \mathbb{Z}/\phi(q)\mathbb{Z}$, la branche $i^{\text{ème}}$

$$L_{p,i}(\chi, s) = L_p(\chi \otimes (\omega^{-i}(x)\langle x\rangle^{-s})$$
$$= \int_{\mathbb{Z}_p^*} \omega^{-i}(x)\langle x\rangle^{-s}\mu_\chi(x).$$

Prop La fonction $L_{p,i}(\chi, s)$ est analytique sur $\mathbb{Z}_p$ et

$$L_{p,i}(\chi, -n) = (1-\chi(p)p^n)L(\chi, -n)$$

si $n \in \mathbb{N}$ et $-n \equiv i \bmod \phi(q)$.

Dém La transformée d'Anice de la restriction de μ_χ à $\mathbb{Z}_p^*$ est

$$-\frac{1}{G(\chi^{-1})}\sum_{b \bmod f}\left(\frac{\chi^{-1}(b) = \chi(p)\chi^{-1}(p^b)}{(1+T)\delta_f^b - 1} - \frac{\chi^{-1}(b)}{(1+T)^p\delta_f^{pb} - 1}\right)$$

Réécrire en utilisons la transformée d'Anice,

④ $\mathcal{L}_{\mathrm{Res}\, Z_p^*(\mu_\chi)}(t) = \mathcal{L}_{\mu_\chi}(t) - \chi(p)\mathcal{L}_{\mu_\chi}(pt)$

et $\int x^n \mu_\chi = (1-\chi(p)p^n) L(\chi,-n)$. $\square$
$n \in \mathbb{N}$

S=1

Maintenant, nous cherchons l'analogue p-adique de

$$L(\chi,-1) = \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod f} \chi^{-1}(b) \log(1-\delta_f^b)$$

(i) Transformée d'Amice de $x^{-1}\mu_\chi$

Prop $A_{x^{-1}\mu_\chi}(T)$

$$= \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum \chi^{-1}(b) \left(\log(1+T)\delta_f^b - 1 \right) -$$

$$\frac{1}{p} \log\left((1+T)^p \delta_f^{bp} - 1 \right)$$

$$= A_{x^{-1}\mu_\chi}(T) - \frac{\chi(p)}{p} A_{x^{-1}\mu_\chi}\left((1+T)^p - 1\right)$$

Dém Si μ est une distribution, les transformées de μ et $x^{-1}\mu$ sont liées par

(5) $(1+T)\frac{d}{dt}\mathcal{A}_{\chi^{-1}\mu}(T) = \mathcal{A}_\mu(T)$.

opérateur

$$\frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum \chi^{-1}(b) \frac{(1+T)\delta_f^b}{(1+T)\delta_f^b - 1}$$

$$= \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum \chi^{-1}(b) \left(\frac{1}{(1+T)\delta_f^b - 1} + 1 \right)$$

$$= \mathcal{A}_\mu(T)$$

Convergence : $\log\left((1+T)\delta_f^b - 1\right)$

$$= \log(\delta_f^b - 1) + \log\left(1 + \frac{\delta_f^b T}{\delta_f^b - 1}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \infty$$

$$- \cdot \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\delta_f^b T}{\delta_f^b - 1} \right)^n .$$

□

Remark Quand $T=0$,

$$L_{p,1}(\chi, 1) = L_p(\chi \otimes \chi^{-1})$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \chi^{-1} \mu_\chi = \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \left(1 - \chi(p)\right) \frac{\cdot}{p}$$

EULER

padic

$$\sum \chi^{-1}(b) \log(\delta_f^b - 1).$$