P- adeques
12/02/2021
Version 1

L-fonction p-adique

12/02/2021

$a \in \mathbb{Z}_p^*$
$\omega(a)$ représ. de Teich.

Nous avons construit $H_p(s, a, f)$ p-adique, méromorphe.

$$H_p(1-n, a, F) = H(1-n, a, F)$$

$$H_p(1-n, a, F) = \bar{\omega}^n H(1-n, a, F) \quad \forall n \geq 1$$

$n \equiv 0 \ (\phi(q))$.

Rem Regardons χ comme étant à valeur dans $\mathbb{C}_p$.

Rem $\omega : \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ définit caractère de Dirichlet p-adique de conducteur q et d'ordre $\phi(q)$. Considérons $\langle \omega \rangle$.

ω génère le gp des caractères de Dirich mod q.

Thm Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur f. Soit $F = \mathrm{ppcm}(f, q)$.
Alors $\exists$ une fonction p-adique méromorphe sur $\{s \in \mathbb{C}_p : |s| < q p^{-1/(p-1)}\}$ t.q.

$$L_p(\chi, 1-n) = \left(1 - \chi\bar{\omega}^n(p) p^{n-1}\right) \frac{B_{n, \chi\bar{\omega}^n}}{n}, \quad n \geq 1.$$

(2) De plus si $\chi = 1$, $L_p(1, s)$ est analytique avec un pôle à $s = 1$ de résidu $(1 - \frac{1}{p})$.

Rem On va démontrer que

$$L_p(\chi, s) = \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{s-1} \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{F} \chi(a) \langle a \rangle^{1-s} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-s}{j} B_j \left(\frac{F}{a}\right)^j \quad \cdots\cdots (1)$$

Dém On a

$$L_p(\chi, s) = \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{F} \chi(a) H_p(s, a, F)$$

H_p est analytique.

Si $s = 1$, rés. de $L_p(\chi, s) = \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{F} \chi(a) \cdot \frac{1}{F}$.

Si $\chi = 1$, $\to 1 - 1/p$

$\chi \neq 1 \to$ $\frac{1}{F} \sum_{a=1}^{F} \chi(a) - \sum_{b=1}^{F/p} \chi(pb)$

0 — S_1 — $b=1$ — 0 si $p \mid f$ — S_2

Pas de pôle si $\chi \neq 1$.

(3) Si $n \geq 1$,

$$L_p(\chi, 1-n) = \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{F} \chi(a) H_p(1-n, a, F)$$

$$= -\frac{1}{n} F^{n-1} \sum_{\substack{a=1, \\ p \nmid a}}^{F} \chi\omega^{-n}(a) B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

$$= \cdots \sum_{a=1}^{F} + \sum_{b=1}^{F/p}$$

$\vdots$

Utilisons Prop (cours de 5/02, Pg. 7)

$$B_{n,\chi} = F^{n-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a) B_n\left(\frac{a}{F}\right) \quad \boxed{f \mid F}$$

Alors

$$L_p(\chi, 1-n) = -\frac{1}{n}\left(B_{n,\chi\omega^{-n}} - \chi\omega^{-n}(p) p^{n-1} \cdot B_{n,\chi\omega^{-n}}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\left(1 - \chi\omega^{-n}(p) p^{n-1}\right) B_{n,\chi\omega^{-n}}. \quad \square$$

Rappel $L(\chi, 1) = -G(\chi)$

L_p et L

Exponentielle p-adique (sur $\mathbb{C}_p$)

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

Prop $\exp(X)$ a rayon de convergence $p^{-1/(p-1)}$.

Dém $\left|\frac{x^n}{n!}\right|_p \longrightarrow 0$ si $|x|_p < p^{-1/(p-1)}$

$\longrightarrow \infty$ si $|x|_p > p^{-1/(p-1)}$

La série converge ssi son terme général $\longrightarrow 0$. □

Rem $e = \exp(1)$ n'est pas défini.

Déf $\log_p(1+X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} X^n}{n}$

Convergence pour $|x|_p < 1$, $x \in \mathbb{C}_p$

Prop $\exists$ une unique extension de $\log_p$ à tout $\mathbb{C}_p^*$ t.q. $\log_p(p) = 0$

$\log_p(xy) = \log_p x + \log_p y$

$\forall\, x, y \in \mathbb{C}_p^*$

⑤ Soit $\alpha = p^x \omega x \in \mathbb{C}_p^*$ (vérifier que $\mathbb{C}_p^* = p^{\mathbb{Q}} \times W \times U_1$; W : gp des racines de l'unité ; $U_1 = \{x \in \mathbb{C}_p, |x-1| < 1\}$) $x \in \mathbb{Q}$, ω une racine d'unité d'ordre premier à p et $|x-1|_p < 1$, $x \in \mathbb{C}_p$.

Alors $\log_p(\alpha) = \log_p(x)$.

Soit $f(\alpha)$ une autre extension de $\log_p$ et $\omega^N = 1$.

$$f(\alpha) = \frac{1}{N} f(\alpha^N) = \frac{1}{N} \underbrace{f(p^{xN})}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{N} f(1)}_{=0} + \frac{1}{N} f(x^N) = \frac{1}{N} \log_p(x^N) = \log_p x. \quad \square$$

Propriété Si $|x| < p^{-1/(p-1)}$ alors $|\log_p(1+x)| = |x|$.

Si $|x| \leq p^{-1/(p-1)}$ alors $|\log_p(1+x)| \leq |x|$.

Propriété $\log_p(\exp x) = x$

$\exp \log_p(1+x) = 1+x$.

Transformée de Mellin p-adique

Rappel Classique

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx = \int \cdots \frac{dx}{x}$$

↑ mesure Haar

ex $f(x) = e^{-x}$

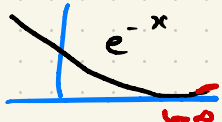
$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

Inv $e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds$, $c > 0$

$= \Gamma(s)$, $\mathrm{Re}\, s > 0$

méromorphe $\forall s$,

$\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$



"presque" trans. de Mellin → $\varphi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} \frac{dx}{e^x - 1}$ ← mesure

⑥ Considérons une branche de la transformée de Mellin associée à une distribution.

Définition Soit $i \in \mathbb{Z}/\phi(q)\mathbb{Z}$ et μ une distribution continue. Alors la i-ème branche de la transformée de Mellin associée à μ est donnée par :

$$\underset{i,\mu}{\mathrm{Mel}}(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \omega(x)^i \langle x \rangle^s \mu(x)$$

Remarque La fonction $x \mapsto \omega(x)\langle x\rangle^s$ est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p^*$ car $\omega(x)^i\langle x\rangle^s = 0$ sur $p\mathbb{Z}_p$. De plus, si $x \in \delta + q\mathbb{Z}_p$, $\delta \in \Delta$. ($\mathbb{Z}_p^* = \bigsqcup_{\delta\in\Delta}(\delta + q\mathbb{Z}_p)$, Δ racine $\phi(q)$ ième de l'unité)

$$\omega(x)^i\langle x\rangle^s = \delta^i\left(\frac{x}{\delta}\right)^s = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}\delta^{i-n}(x-\delta)^n \text{ et}$$

(cours 4)

ordre de Δ étant $\phi(q)$, $\omega(x)^n = \omega(x)^i$ si $n \equiv i \bmod \phi(q)$

Alors $\omega(x)^i\langle x\rangle^s = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\equiv i \bmod \phi(q)}} x^n \quad \forall x, s \in \mathbb{Z}_p$.

Rem • $\underset{i,\mu}{\mathrm{Mel}}(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \omega(x)^i\langle x\rangle^s \mu(x)$.

• $\underset{i,\mu}{\mathrm{Mel}}(n) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} x^n \mu$ si $n \equiv i \bmod \phi(q)$

⑦ Manière plus générale pour la transformée de Mellin.

Déf. Soit μ une distribution sur $\mathbb{Z}_p^*$. La transformée de Mellin de μ est la fonction qui à un caractère localement analytique β de $\mathbb{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^*$ associe l'intégrale

$$\mathrm{Mel}_\mu(\beta) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \beta(x)\,\mu(x).$$

Alors $\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s) = \mathrm{Mel}_\mu\left(\omega(x)^i \langle x\rangle^s\right)$.

Il faut vérifier que $\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s)$ est une fonction analytique. Construisons une autre transformée.

Soit $\theta : 1+q\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ (morphisme de groupes)

$$x \longmapsto \frac{\log x}{\log u}$$

u engendre $1+q\mathbb{Z}_p$

Notation $\theta^* f(x) = f(\theta(x))$

f localement analytique (sur $\mathbb{Z}_p$) $\Rightarrow$ $\theta^* f$ loc. analytique (sur $1+q\mathbb{Z}_p$)

On peut construire une distribution sur $\mathbb{Z}_p$ par à partir de $\theta^* f$

(8) **Déf** Soit μ une distribution à support dans $1+q\mathbb{Z}_p$. La distribution $\theta_* \mu$ est définie sur $\mathbb{Z}_p$ comme :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f \theta_* \mu = \int_{1+q\mathbb{Z}_p} \theta^* f \mu .$$

Déf La convolution $\circledast$ de deux distributions λ et μ est définie par

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f \lambda \circledast \mu = \int_{\mathbb{Z}_p} \left(\int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x+y) \mu(x) \right) \lambda(y) .$$

Proposition Soit X un ouvert compact de $\mathbb{Z}_p$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ et μ une distribution continue sur $\mathbb{Z}_p$, alors

$$\mathrm{Res}_X (\mu \circledast \alpha) = \mathrm{Res}_{\alpha^{-1}(X)} (\mu) \circledast \alpha .$$

Dém $\mathbb{1}_X(\alpha x) = \mathbb{1}_{\alpha^{-1}X}(x)$, $(X \subset \mathbb{Z}_p)$

$$\int f(x) \mathrm{Res}_X (\mu \circledast \alpha) = \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_X f(x) \mu \circledast \alpha$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{1}_X(\alpha x) f(\alpha x) \mu(x) = \int f(\alpha x) \left(\mathbb{1}_{\alpha^{-1}X}(x) \mu(x) \right)$$

$$= \int f(\alpha x) \mathrm{Res}_{\alpha^{-1}X}(\mu) . \qquad \square$$

⑨ **Déf** Si $i \in \mathbb{Z}/\phi(q)\mathbb{Z}$ et si μ est une distribution sur $\mathbb{Z}_p^*$, la *i-ème branche* Γ_μ^i de la *transformée de Leopoldt* de μ est donnée par

$$\Gamma_\mu^i = \theta_* \operatorname*{Res}_{1+q\mathbb{Z}_p} \left(\sum_{\delta \in \Delta} \delta^{-i} \mu \circledast \delta \right)$$

$$= \theta_* \sum_{\delta \in \Delta} \delta^{-i} \operatorname*{Res}_{\delta^{-1}+q\mathbb{Z}_p} (\mu) * \delta .$$

Nous pouvons exprimer la transformée de Mellin comme suivant :

Prop Si μ est une distribution continue et $i \in \mathbb{Z}/\phi(q)\mathbb{Z}$ alors

$$\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \omega(x)^i \langle x \rangle^s \mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{Z}_p} e^{sy} \Gamma_\mu^i(y) .$$

(10) **Dém** Soit $y = \theta(x) = \dfrac{\log x}{\log u}$

$$u^{sy} = \exp(s \log x) = \langle x \rangle^s$$

Alors, $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p} u^{sy}\, \Gamma_\mu^i(y) = \int_{1+q\mathbb{Z}_p} \langle x \rangle^s \sum_{\delta \in \Delta} \delta^{-i} \mu \circledast \delta$

$$= \sum_{\delta \in \Delta} \int_{1+q\mathbb{Z}_p} \underbrace{\langle \delta x \rangle^s}_{= \langle x \rangle} \underbrace{\delta^{-i} \mu}_{= \omega(x)}$$

$$= \sum_{\delta} \int \omega(x)^i \langle x \rangle^s \mu(x)$$

$x \in \delta^{-1} + q\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Z}_p^* = \dot{\bigcup}_\delta (\delta + q\mathbb{Z}_p)$. □

Conclusion Si μ est une distribution continue, $\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s)$ est une **fonction analytique de s.**