LES NOMBRES p-ADIQUES

COURS DONNÉ PAR RAF CLUCKERS ET GAUTAMI BHOWMIK

1. Motivation

La motivation de ce cours sur les nombres p-adiques sont certains quantités de comptage, ou encore, de sommation, comme suit.

Soit f un polynôme en n variables avec coefficients en $\mathbb{Z}$. Soit $N > 0$ entier.

Voici des quantités centrales de ce cours:

$$\#\{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \mid f(x) = 0\}, \tag{1.0.1}$$

et

$$\sum_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n} \exp(2\pi i \frac{f(x)}{N}).$$

Par le théorème des restes Chinois, le cas le plus important c'est quand $N = p^e$ avec p premier et $e > 0$ entier.

En effet, si on écrit a_N pour la quantité en Equation (1.0.1), et si on écrit $N = \prod p_i^{e_i}$ pour des nombres premiers p_i différents, des entiers $e_i > 0$, alors on a

$$a_N = \prod_{i=1}^{\ell} a_{N_i}$$

avec $N_i = p_i^{e_i}$.

Ces nombres de solutions de f modulo N ont été étudiés par Igusa, Denef, Loeser, et beaucoup d'autres. Ils seront traîtés dans ce cours par Raf Cluckers.

Les nombres a_{p^e} se laissent étudier avec les nombres p-adiques, avec de la géométrie et de l'analyse p-adique. Parfois, 'comptage' deviendra 'intégration'. La géométrie p-adique mentionnée est reliée à la géométrie algébrique, et à la théorie des modèles.

A part les quantités mentionnées, il y a aussi

$$\#\{x \in \mathbb{F}_{p^m}^n \mid f(x) = 0\},$$

avec $\mathbb{F}_{p^m}$ le corps fini à p^e éléments, étudiés en profondeur par Grothendieck, Weil, Dwork, Deligne et beaucoup d'autres. Ils seront traîtés dans ce cours par Gautami Bhowmik.

Scéance 1: Les nombres p-adiques.

On s'inspire sur les notes de cours de Serge Cantat, qui suit le livre de Koblitz [3]. Il y a aussi le très gentil livre de Svetalena Katok [2] qui traîte les mêmes notions de base.

Voici je liste les notions cléfs.

valuation et norme p-adique sur $\mathbb{Q}$.

la distance p-adique.

$|\cdot|_p$ est un norme ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

Cette norme est spéciale et légèrement contre-intuitif par son aspect ultramétrique (aussi appelée non-archimédienne).

Regardons une boule p-adique dans $\mathbb{Q}$

$$B = \{x \mid \mathbb{Q} \mid |x-a|_p < r\}$$

avec a dans $\mathbb{Q}$ et $r > 0$. Alors, on a que chaque point a' dans B peut servir comme centre de la boule, c'est à dire $B = \{x \mid \mathbb{Q} \mid |x-a'|_p < r\}$.

Cette norme sur $\mathbb{Q}$ est très naturelle et importante, par le théorème d'Ostrowski.

La Section 4 de Koblitz:

Avec les suites de Cauchy, on construit la complétion de $\mathbb{Q}$. On le dénote par $\mathbb{Q}_p$, avec la norme donnée par le norme p-adique.

La norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ donne alors une topologie Hausdorff sur $\mathbb{Q}_p$, avec base d'ouverts les boules dans $\mathbb{Q}_p$.

Le norme p-adique prend ses valeurs dans $p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, il est appelé discret parce que son groupe de valeurs (l'image de $\mathbb{Q}_p^\times$ sous la valuation p-adique) est $\mathbb{Z}$.

Chaque boule en $\mathbb{Q}_p$ est à la fois ouvert et fermé.

La boule $\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}_p$. C'est un anneau principal avec un unique idéal maximal qui est la boule $p\mathbb{Z}_p$.

Une boule ouverte $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a|_p < p^e\}$ avec $e \in \mathbb{Z}$ est appelé de rayon ouvert (normatif) p^e. Son rayon valuatif est e.

Une boule ouverte de rayon ouvert normatif p^e peut être partitionnée en p boules ouvertes de rayon ouvert p^{e-1}.

Pour x dans $\mathbb{Q}_p^n$, on définit $|x| = |(x_1, \ldots, x_n)|_p$ par $\max_i |x_i|_p$. Ceci donne une distance sur $\mathbb{Q}_p^n$.

On met alors sur $\mathbb{Q}_p^n$ la topologie produit. Une boule dans $\mathbb{Q}_p^n$ est un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{Q}_p^n \mid |x-a|_p < r\}$ avec a and $\mathbb{Q}_p^n$ et $r > 0$.

References

1. J. Igusa, *An introduction to the theory of local zeta functions*, Studies in advanced mathematics, AMS, 2000.
2. S. Katok, *p-adic analysis compared with real*, Student Mathematical Library, vol. 37, American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2007.
3. N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 58, Springer-Verlag, 1977.
4. M. Popa, text on https://sites.math.northwestern.edu/ mpopa/571/chapter3.pdf.