Université des Sciences et Technologies de Lille

Université du Littoral Côte d'Opale

Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis

Master Recherche 2^e année (ex D.E.A.)
Mathématiques Appliquées
Année universitaire 2004-2005

Présentation générale

La deuxième année du Master Recherche Mathématiques Appliquées est organisée conjointement par l'Université des Sciences et Technologies de Lille (établissement principal), l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis et l'Université du Littoral Côte d'Opale. Ce Master 2 s'adresse à des étudiants ayant déjà acquis de solides connaissances en mathématiques (niveau maîtrise/Master 1^e année).

Les mathématiques appliquées sont devenues un élément essentiel du progrès scientifique et technologique. Les différents domaines mathématiques concernés sont variés et en évolution rapide ; leur développement se traduit par un besoin accru en chercheurs mathématiciens.

Le Master 2, par sa large gamme de cours, offre une formation théorique et appliquée couvrant les différents aspects de cette discipline :

- Approximation et Géometrie de la CAO (ACAO)
- Équations aux dérivées partielles et analyse numérique des EDP (EDP)
- Probabilités
- Statistique

Ainsi, les étudiants sortant du Master 2 non seulement maîtrisent certains développements récents des mathématiques appliquées mais également, grâce au mémoire/stage, possèdent une première expérience de réalisation de projet de recherche portant sur les applications d'intérêt scientifique et industriel.

Objectifs et Débouchés

La deuxième année d'un Master Recherche est une transition entre enseignement classique de premier et deuxième cycle et la prise d'initiatives dans la découverte de problèmes actuels qu'ils soient théoriques ou liés aux applications, éventuellement industrielles.

Le projet pédagogique a été conçu selon quatre objectifs : offrir une formation la plus complète possible en mathématiques appliquées, diversifier les niveaux d'abstraction des enseignements, développer les interactions entre les différents axes enseignés et favoriser les liens avec les équipes de disciplines voisines, notamment avec les autres laboratoires de l'école doctorale SPI (informatique, automatique, mécanique, IEMN par exemple) et les écoles d'ingénieurs (École Centrale, ENSAM, POLY'TECH, ENIC, par exemple).

Le Master 2 de Mathématiques Appliquées vise à former :

- des chercheurs en mathématiques appliquées susceptibles de faire carrière dans l'enseignement supérieur et dans la recherche,
- des ingénieurs mathématiciens de haut niveau participant aux programmes de haute technologie de l'industrie dans les bureaux d'études industriels ainsi que dans les sociétés de service.

La poursuite en thèse (sous le régime boursier, contractuel ou d'enseignant-chercheur) reste la finalité première du Master 2. Le travail de thèse mené au sein des laboratoires associés, en collaboration éventuelle avec des industriels, sous la direction de chercheurs de la formation doctorale procure une formation à la recherche reconnue.

Laboratoires d'accueil

- Laboratoire de Mathématiques Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)
  - équipe Analyse Numérique et Optimisation / Equations aux dérivées partielles,
  - équipe Statistique et Probabilités,

  Université des Sciences et Technologies de Lille
- Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville (UPRES-EA 2597), Université du Littoral Côte d'Opale
- Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Calcul Scientifique (UPRES-EA 2442), Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis

Responsable du Master 2

Bernhard BECKERMANN
Laboratoire de Paul Painlevé (ANO-EDP)
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées – Bâtiment M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex (France)
Adresse électronique : Bernhard.Beckermann@univ-lille1.fr

Renseignements pratiques

- Le candidat doit retirer et déposer un dossier d'admission pédagogique au

  Secrétariat Scientifique – Mme Bérat
  UFR de Mathématiques Pures et Appliquées – Bâtiment M2
  Université des Sciences et Technologies de Lille
  59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
  Téléphone : +33 3 20 43 42 33, Télécopie : +33 3 20 43 43 02,
  Adresse électronique : Raymonde.Berat@univ-lille1.fr

  Date limite de dépôt des candidatures : **30 juin 2004**.
- Tout candidat **non titulaire** d'un Master 1 ou d'une maîtrise de mathématiques française (sans mention, mention MIM, mention mathématiques appliquées) doit présenter une demande de validation d'études (sans acceptation de la demande de validation d'études, une inscription en Master 2 est impossible).
  - Pour l'Université de Lille, veuillez vous adresser au Service scolarité 3ème cycle pour obtenir le pré-imprimé de demande de validation d'études.

    Service Scolarité 3ème cycle
    Bâtiment A3
    Université des Sciences et Technologies de Lille
    59655 Villeneuve d'Ascq
    Tel. 03 20 43 44 69, adresse électronique : Scol-cycle3@univ-lille1.fr
    Site Web : `http ://ustl.univ-lille1.fr/suaio/pages/scol/3eme`

    Le préimprimé de la demande peut être téléchargé à l'adresse ci-dessus, date limite de dépôt du dossier le **20 Mai 2004**.

  - Pour l'Université du Littoral et l'Université de Valenciennes, après acceptation du dossier d'admission pédagogique, le Service scolarité 3ème cycle vous adressera le pré-imprimé de demande de validation d'études.
- Après autorisation, l'inscription se fait au début de l'année universitaire (jusqu'à mi-octobre) auprès des services administratifs des universités concernées.
- Quelques allocations de Master 2 sont attribuées sur critère pédagogique. Les dossiers sont à retirer à la Scolarité 3ème cycle au moment de l'inscription.

Pour des renseignements plus amples concernant les objectifs du Master 2 contactez
- J.-L. Bon (Labo Painlevé (Sta-Proba), Lille), Jean-Louis.Bon@eudil.fr
- B. Beckermann (Labo Painlevé (ANO-EDP), Lille), Bernhard.Beckermann@univ-lille1.fr
- S. Nicaise (Labo MACS, Valenciennes), Serge.Nicaise@univ-valenciennes.fr
- P. Deuring (Labo LMPA, Littoral), Paul.Deuring@lmpa.univ-littoral.fr

ou tout autre enseignant du Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées. D'autres sources d'information sont accessible à partir d'internet
- La page officielle du Master 2 : `http ://www.univ-lille1.fr/math/deaMA`
- Le service scolarité à Lille : `http ://ustl.univ-lille1.fr/suaio/pages/scol/3eme`

Admission

L'autorisation d'inscription en Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées est délivrée après examen du dossier des candidats.

Le Master 1 ou la maîtrise (Mathématiques, Mathématiques Appliquées, Ingénierie Mathématique) est la voie d'accès normale. La sélection se fait au vu des résultats en licence et en Master 1/maîtrise.

Pour les étudiants non titulaires d'un Master 1/maîtrise, l'inscription se fait sur dossier. Le plus grand compte sera tenu des programmes des enseignements suivis antérieurement et, éventuellement, l'inscription pourra s'accompagner d'une incitation à suivre un complément de formation de Master 1.

Pour les écoles d'ingénieurs, l'accueil des élèves sortants ou en dernière année d'études se fait au vu des résultats scolaires, des motivations et sur entretien.

Les diplômes étrangers sont soumis à validation.

Organisation des études

Cours fondamentaux (premier trimestre)

	thème	intitulé du cours
6 ECTS, 25h	Obligatoire : Analyse fonctionnelle appliquée	
Deux parmi les quatre cours suivants (2x6 ECTS, 2x25h)	ACAO EDP Proba Stat	Biorthogonalité et Applications Analyse et résolution numérique des EDP Processus stochastiques Eléments de Statistique Asymptotique
2 ECTS, 25h 2 ECTS	Obligatoire : TD Outils informatiques (S+, LaTeX, Matlab) Obligatoire : Projet d'initiation à la recherche	

Cours spécialisés (deuxième trimestre)

Trois parmi les 8 modules suivants (3x6 ECTS, 3x25h)	ACAO EDP Proba Stat Autres	Résolution numérique de systèmes / Géométrie de la CAO Statistique physique / Équations d'évolution et Bifurcations Probabilités dans espaces fonctionnels / Calcul Stochastique Fiabilité / Statistique des processus Une option d'un autre Master 2 de l'ED SPI
20 ECTS	Obligatoire : **Mémoire/Stage (troisième trimestre)**	

L'enseignement d'informatique au deuxième trimestre est attaché à certains cours spécialisés.

Au 1er trimestre, dans le tronc commun, l'étudiant suit 3 modules de 25h chacun, le module "Outils informatiques" et effectue le "Projet d'initiation à la recherche". Au 2nd trimestre, l'étudiant choisit 3 cours spécialisés de 25h. De plus, l'école doctorale propose un module "d'initiation à la recherche d'emploi" et un module de "méthodologie dans la recherche" (25h en tout).

Les étudiants assistent aux séminaires de recherche et/ou groupes de travail liés à leur choix d'options.

Sur avis des équipes enseignantes, un étudiant du Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées peut être autorisé à choisir, au niveau des cours spécialisés, l'un des cours d'un autre

Master 2 de l'école doctorale ou de 3ème année d'école d'ingénieurs.

Les procédures de validation seront prévues, permettant d'attribuer des crédits ECTS de l'année Master 2 aux étudiants préparant le concours de l'Agrégation.

Sans préjuger des enseignements et séminaires spécifiques qui pourront être ouverts ultérieurement au titre de l'école doctorale, on encourage les étudiants à enrichir leur formation en suivant, à titre d'exemple :

– soit un module du Master 2 Recherche Mathématiques pures (par exemple analyse fonctionnelle)
– soit un module du Master 2 Recherche Informatique (par exemple Graphique, Bio-Informatique, Calcul formel, Architecture du parallélisme, Optimisation (méthodes et applications)).
– soit un module du Master 2 Recherche Mécanique (par exemple Méthodes asymptotiques – ondes et stabilité (filière Fluides), Schémas numériques (filière Fluides), Méthode des éléments finis (filière Solides).
– soit le module de CFAO en troisième année de l'ENSAM de Lille.

Comme première démarche de recherche il est demandé à l'étudiant au début du premier trimestre (octobre) de réaliser un "projet d'initiation à la recherche" où il étudie un article ou un chapitre d'un livre dans un des domaines des cours du Master 2. Le projet est prévu sur une durée de 2-3 semaines (en parallèle avec les enseignements en cours). Il est encadré par un des enseignants intervenant l'année en cours. Le projet est évalué par une soutenance orale.

Chaque étudiant choisit de faire son mémoire avec l'un des membres des équipes d'accueil attachées au Master 2. Ce mémoire donne lieu à un rapport écrit et à une soutenance orale.

On encourage les étudiants à effectuer un stage soit dans un laboratoire privé ou semi-privé soit dans un laboratoire universitaire, en France (par exemple le laboratoire MASI, de l'Institut Blaise Pascal, l'Université de Versailles St Quentin, l'UTC de Compiègne, l'INRIA Sophia Antipolis, EDF, CEA) ou à l'étranger, notamment dans les universités auxquelles nous sommes liés par des accords de coopération comme Socrates ou le réseau universitaire franco-germano-russe piloté par l'équipe ANO-EDP. Dans certains cas le rapport de stage pourra tenir lieu de mémoire.

Contrôle des connaissances

Le Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées consiste en trois trimestres et vaut 60 ECTS. Les crédits s'obtiennent en validant

- trois cours fondamentaux : chaque cours fondamental vaut 6 ECTS et est sanctionné par un examen fin décembre ;
- trois cours spécialisés : chaque cours spécialisé vaut 6 ECTS et est sanctionné par un examen fin mars ;
- le "projet d'initiation à la recherche" (2 ECTS) ;
- le module "Outils informatiques" (2 ECTS) ;
- le mémoire/stage, noté sur 20 crédits ECTS et soutenu fin juin ou fin septembre.

Une deuxième session sera organisée en septembre 2005.

Il est conseillé aux étudiants salariés de préparer le Master 2 Recherche en deux ans (ils peuvent obtenir le Master 2 à la fin de la première année mais ne peuvent pas suivre le Master 2 en deux ans s'ils ne l'ont pas demandé dès la première inscription). L'autorisation de redoublement du Master 2 n'est accordée qu'à titre exceptionnel et après décision d'une commission *ad hoc*.

L'autorisation d'inscription en thèse est accordée par le jury après délibération. En aucun cas, elle n'est automatique pour les étudiants reçus au Master 2.

Calendrier de l'année scolaire 2004-2005

- Réunion de rentrée : Jeudi 30 Septembre 2004 à 10h, Salle de Réunion, Bât. M2, USTL
- Début des cours : Lundi 4 Octobre 2005.

NB : Vu l'expérience des dernières années, l'équipe d'enseignants conseille fortement aux étudiants de ne pas manquer les premières séances de cours.

Programme des cours
Année universitaire 2004-2005

Année universitaire 2004-2005
1er trimestre
Cours obligatoire

Analyse fonctionnelle appliquée
Ph. Heinrich

L'objectif de ce cours est de permettre une mise à niveau et de proposer des compléments en analyse fonctionnelle en vue d'une utilisation dans les divers enseignements spécialisés du Master 2 Recherche de Mathématiques Appliquées. Les différentes notions abordées seront illustrées dans le cadre d'espaces fonctionnels classiques. Le cours devrait s'articuler autour des thèmes suivants :

- Espaces de Banach et de Fréchet.
- Quelques espaces fonctionnels classiques : L^p, espaces de Hölder, de fonctions de test, de Sobolev et de Besov.
- Dualité : topologies $*$-forte et $*$-faible. Espaces réflexifs.
- Bases dans les espaces de Banach : bases de Schauder, bases inconditionnelles.
- Meilleure approximation.
- Compacité en dimension infinie.
- Etude de quelques classes d'opérateurs ; en particulier, les opérateurs bornés et de Hilbert-Schmidt.
- Introduction aux ondelettes.

Bibliographie

- Adams, A., Sobolev spaces, Academic Press (1975).
- Brézis, H., Analyse Fonctionnelle, Masson (1983).
- Meyer, Y., Ondelettes et Opérateurs, t. I, Hermann (1990).
- Rudin, W., Analyse fonctionnelle.
- Schwartz, L., Topologie générale et analyse fonctionnelle.
- Triebel, H., Theory of function spaces II, Birkhaüser (1992).
- Yosida, K. Functional Analysis, Springer (1966).

Année universitaire 2004-2005
1er trimestre
Option ACAO

Biorthogonalité et Applications
C. Brezinski et B. Beckermann

La notion d'orthogonalité est très importante en analyse numérique et elle a de nombreuses applications. Les plus connues sont les polynômes orthogonaux et les formules de quadrature de Gauss ainsi que les méthodes de projection pour les systèmes linéaires.
Le but de ce cours est de présenter les concepts plus généraux d'orthogonalité et de biorthogonalité formelles et d'étudier leurs applications. Ces notions permettent d'aborder des problèmes très divers dans un cadre unifié et elles ouvrent de nombreuses perspectives.

Plan du cours

- Polynômes orthogonaux formels
  - Définitions et propriétés
  - Applications
    - Approximation de Padé
    - Méthodes de projection pour les systèmes linéaires
    - Contrôle linéaire
    - Méthodes d'extrapolation et applications
- La biorthogonalité
  - Le problème général de l'interpolation
  - Les familles adjacentes
  - Applications
    - Les polynômes biorthogonaux
    - Approximation de séries de fonctions
    - Transformations de suites

Bibliographie

- G.A. Baker & P.R. Graves-Morris, Padé Approximants, 2ème edition, Cambridge University press.
- Brezinski, C., Padé–Type Approximation and General Orthogonal Polynomials, Birkhäuser–Verlag, Basel, 1980.
- Brezinski, C., Biorthogonality and its Applications to Numerical Analysis, Marcel Dekker, New York, 1992.
- Brezinski, C., Projection Methods for Systems of Equations, North–Holland, Amsterdam, 1997.
- Brezinski, C., Computational Aspects of Linear Control, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- Brezinski, C., Redivo Zaglia, M., Extrapolation Methods. Theory and Practice, North–Holland, Amsterdam, 1991.
- Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, PWS Publishing, Boston, MA, 1996.

Année universitaire 2004-2005
1er trimestre
Option EDP

Introduction à l'analyse des EDP et à la résolution numérique des EDP elliptiques

P. Deuring

- Équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques de 2^e ordre : éléments de la théorie classique ; solutions variationnelles dans des espaces de Sobolev ; théorèmes de régularité.
- Applications a la théorie de la résolution numérique des équations elliptiques par des méthodes d'éléments finis.
- Semi-groupes. Méthodes variationnelles directes. Exemple d'un problème non lineaire : surfaces minimales.

Bibliographie

- L. E. Evans : *Partial Differential Equations.* AMS, Providence, R. I., 1998.
- S. Nicaise : *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles.* Cour et problèmes résolus. Dunod, Paris, 2000.
- F. John : *Partial differential equations* (4th ed.). Springer, New York e.a., 1982.
- J.-E. Rakotoson, J.-M. Rakotoson : *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles.* Presses universitaires de France, Paris, 1993.
- A. Quarteroni, A. Valli : *Numerical approximation of partial differential equations.* Springer, Berlin e.a., 1994.
- M. Renardy, R. C. Rogers : *An introduction to partial differential equations.* Springer, New York e.a., 1993.

Année universitaire 2004-2005
1er trimestre
Option Proba

Probabilités : Processus Stochastiques
Yu. Davydov

Le but de ce cours est

1. d'étudier les principales classes de processus stochastiques ;
2. de construire le mouvement brownien.
3. d'étudier les méthodes qui permettent de construire de bonnes versions des processus stochastiques.

Les grandes lignes du cours :

• Variables aléatoires à valeurs dans les espaces métriques séparables, lois relativement compactes et la notion de tension.
• Construction des processus stochastiques, théorème d'extension de Kolmogorov, régularité des trajectoires.
• Les processus vus comme des variables aléatoires valeurs dans des espaces fonctionnels.
• Principales classes de processus stochastiques :
  – à accroissements indépendants,
  – stationnaires,
  – martingales,
  – processus de Markov,
  – processus ponctuels.
• Construction trajectorielle du mouvement brownien. Construction de la mesure de Wiener et théorème de Donsker.

Bibliographie

– Billingsley, P., Convergence of Probability measures, Wiley (1968).
– Revuz, D., Yor, M., Continuous martingales and Brownian motion, Springer (1991).
– Borodin, A.N., Salminen, P., Handbook of Brownian motion : facts and formula, Birkhauser (1996).
– Gihmav, I., Skorohod, A.V., The theory of Stochastic Processes, Vol. 1, Springer (1974).

Année universitaire 2004-2005
1er trimestre
Option Stat

Eléments de Statistique Asymptotique

M.-Cl. Viano

Dans ce cours on décrit quelques unes des principales notions et méthodes statistiques ainsi que les propriétés asymptotiques de ces méthodes, en insistant sur leurs développements actuels
• les notions d'efficacité et de normalité asymtotique locale, la notion de robustesse,
• les différentes méthodes de minimum de contraste : maximum de vraisemblance, méthode de Whittle, M-estimateurs.
• un aperçu des méthodes de noyau dans les contextes non-paramétriques,
• le bootstrap
• quelques exemples de détection de rupture.

Un des outils de base de ce cours est le processus empirique, étudié dans le cours de Davydov-Dermoune. La plupart des résultats asymptotiques sont donnés dans la situation classique de variables indépendantes et de même loi. On fera cependant quelques incursions dans le domaine des processus stationnaires faiblement dépendants.

Bibliographie :

- Bickel, Klaassen, Ritov, Wellner (1998) Efficient and adaptive Estimation for semiparametric Models. Springer.
- Dacunha-Castelle D., Duflo M. (1983) Probabilités et Statistiques : vol.2. Problèmes à temps mobile. Masson.
- Van der Vaart (2000) Asymptotic Statistics. Cambridge.

Année universitaire 2004-2005
1er trimestre
Cours obligatoire

Outils informatiques
B. Beckermann (Matlab), C. Brezinski (LaTeX), A. Philippe (S+)

Pour mieux répondre aux besoins des Mathématiques Appliquées, on propose un enseignement des outils informatiques sous forme de TD sur machine. Cet enseignement tient compte de la formation déjà acquise en premier et deuxième cycle (langage du type ADA/Pascal/Fortran/C et logiciel de calcul formel).

- Traitement de texte scientifique (LaTeX, 3h)
- Stage de formation sur les logiciels de calcul scientifique (22h) : pendant une semaine d'interruption des cours au premier trimestre, deux jours sont consacrés au logiciel de calcul scientifique Matlab. Le reste de la semaine est organisé sous forme d'options. L'étudiant choisit entre une présentation du logiciel S+ (Statistique) ou un approfondissement de la programmation sous Matlab (Analyse numérique).

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option ACAO

Résolution numérique de problèmes linéaires et non linéaires et applications

H. Sadok

Dans certains problèmes pratiques, comme en électromagnétisme et en traitement du signal on est amené à résoudre plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice et plusieurs second membres. Au lieu de résoudre ces sytèmes séparément, il est intéréssant car moins couteux de les résoudre par blocs.
On peut résoudre globalement les systèmes en utilisant des projections sur des sous espaces engendrés par des matrices. On obtient ainsi des méthodes comme le Global-GMRES, le Block BiCGSTAB, etc ...

Plan du cours

1. Méthodes de sous espace de Krylov par blocs
2. Résolution de systèmes d'équations linéaires avec plusieurs second membres.
   - méthodes globales,
   - méthodes par blocs,
   - analyse de la convergence.
3. Résolution de systèmes non linéaires de grande taille.
   - méthodes d'extrapolation.
   - méthodes inexactes de Newton.
4. Applications : approximation d'EDP non linéaires, comme l'équation de Bratu modifiée,

$$-\Delta u + \alpha u_x + \lambda e^u = b.$$

Bibliographie

- C. BREZINSKI, M. REDIVO ZAGLIA, *Extrapolation Methods. Theory and Practice*, North-Holland, 1991.
- F. R. GANTMACHER, *The theory of Matrices*, vol. 1, Chelsea, New York, 1959.
- C. T. KELLEY, *Iterative Methods for Solving Linear and Nonlinear Equations*, SIAM, 1995.
- Y. SAAD, *Iterative Methods for sparse linear systems*, Second edition, SIAM, 2003.
- G. W. STEWART AND J. G. SUN, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, New York, 1990.

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option ACAO

Géométrie de la CAO

G. Albrecht, O. Gibaru

L'objectif est de donner quelques résultats mathématiques récents, nécessaires au développement ou à la création de logiciels industriels en CAO et CFAO (Conception et Fabrication Assistée par Ordinateur).
Les courbes, les surfaces et les splines polynomiales définies par des points de contrôle (forme Bézier-de Casteljau et de Boor) sont les outils principaux de la modélisation en CAO et CFAO et dans divers domaines industriels.
Le cours propose plus généralement la théorie et l'algorithmique du contrôle des courbes, des surfaces et des splines rationnelles *via* la notion de vecteurs massiques. Ce modèle rationnel qui contient le modèle polynomial ci-dessus, permet plus de possibilités afin de satisfaire diverses contraintes mathématiques ou de métier.

Les grandes lignes du cours :

Géométrie projective, l'espace vectoriel des vecteurs massiques. Construction du polygone massique de contrôle des courbes rationnelles : forme (BR), des surfaces rationnelles : forme (SBR) et des splines rationnelles : forme (NR). Cas particulier des courbes et carreaux Bézier-de Casteljau.
Algorithmes de calcul d'un contact. Dérivation. Transformée projective et affine de (BR), (SBR), (NR). Rôle du paramétrage.
Conditions nécessaires et suffisantes de raccordement C^k et G^k en terme de vecteurs massiques.
Divers problèmes sur les courbes avec contraintes cinématiques, mécaniques, esthétiques.
Création de surfaces de remplissage à plusieurs bords et à grande régularité de raccordement.

Bibliographie

- C. de Boor, A Practical Guide to Splines, Springer Verlag (1978)
- J.-C. Fiorot, P. Jeannin, Courbes et Surfaces Rationnelles, Applications à la CAO, RMA 12, Masson (1989). Version anglaise chez Wiley and Sons (1992).
- J.-C. Fiorot, P. Jeannin, Courbes Splines Rationnelles, Applications à la CAO, RMA 24, Masson (1992).
- J. Hoschek, D. Lasser, Fundamentals of CAGD, AK Peters (1993).

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option EDP

Modèles et méthodes mathématiques de la statistique physique

S. de Bièvre et Th. Goudon

Le cours fournira une introduction aux techniques d'analyse utilisées dans l'étude de divers problèmes issus de la physique et plus particulièrement de certains modèles de physique statistique. Ces équations décrivent l'évolution d'un "grand nombre" de particules soumises à diverses interactions et sont motivées par des champs d'application extrêmement variés : gaz raréfiés, semi-conducteurs, dynamique des populations... Dans ce cours, on développera les arguments de modélisation qui conduisent à ces modèles. On présentera ensuite quelques techniques mathématiques permettant d'établir l'existence de solutions et d'étudier certaines de leurs propriétés. Enfin, on insistera sur un certain nombre de problèmes d'analyse asymptotique naturellement suscités par ces modèles.

Cette option est proposée également aux étudiants du Master 2 Mathématiques Pures. Une première partie de ratrappage sur les EDP est organisée au premier semestre pour les étudiants de Mathématiques Pures, où on traite des sujets également évoqués dans le CF EDP du Master 2 Mathématiques Appliquées.

Bibliographie

- Brezis H., *Analyse fonctionnelle* (Masson, 1983).
- Bouchut F., Golse F., Pulvirenti M., *Kinetic equations and asymptotic theory* edited by L. Desvillettes, B. Perthame, Series in Applied Mathematics, 4 (Gauthier-Villars, 2000).
- Cercignani C., *The Boltzmann equation and its application* (Springer, 1990).
- Dautray R., Lions J.-L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*(Masson, 1988).
- Evans L. C., *Partial differential equations* Graduate Studies in Mathematics (AMS 1999).
- Kubo R., Toda M., Hashitsume N., *Statistical physics I and II* (Springer, 1992).
- Lions P.L., *Equations cinétiques* (Ecole Polytechnique, 1994).
- Ruelle D., *Statistical mechanics, rigorous results* (Benjamin, New York, 1969).
- Villani C., *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory* in Handbook of mathematical fluid mechanics, edited by Susan Friedlander and Denis Serre (North-Holland, 2002).

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option EDP

Equations d'évolution et Bifurcations
F. Ali Mehmeti

1. **Théorie spectrale**
   Théorème spectrale, extension de Friedrichs (appli. : un principe d'action stationnaire abstrait), principe de Minmax de Courant-Fischer (appli. : comportement asymptotique de valeurs propres de systèmes vibratoires), théorème de Kato-Rellich (appli. : systèmes perturbés), formule de Trotter-Kato (appli. : methode itérative pour des systèmes perturbés), principe d'absorption limite pour un problème de scattering
   Bibliographie

   – Reed,M., Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics I : Functional Analysis*, Acadamic Press, New York and London, 1972.
   – Zeidler, E. : *Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics*; Applied Mathematical Sciences, Vol. 108; Springer-Verlag, New York, 1995.
   – Wilcox, C.H., *Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
   – Ali Mehmeti, F. *Tunnel effect and Sommerfeld problem : Transient waves in semi-infinite structures*; Mathematical Research **91**, Akademie Verlag, Berlin, 1996.

2. **Equations d'évolution**
   Théoreme de Lumer-Phillips, formule de la variation de la constante et problèmes semi-linéaires (appli. : particules avec autointeraction), solutions douces (appli. : problèmes de transmissions avec des conditions initiales non-réguliers), exemples du blowup de solutions.
   Bibliographie

   – Arendt, W., Batty, C.J.K., Hieber, M., Neubrander, F. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*; Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
   – Alinhac, S. *Blowup for Nonlinear Hyperbolic Equations*; Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.
   – Cazenave, T., Haraux, A. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*; Math. et Appl. **1**, SMAI, Ellipses, 1990.
   – Ali Mehmeti, F. *Tunnel effect and Sommerfeld problem : Transient waves in semi-infinite structures*; Mathematical Research **91**, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
   – Strauss,W. *Nonlinear Wave Equations*; Conf. Board Math. Sc. **73**, AMS, Providence, Rhode Island,1989.

3. **Bifurcation**
   Dérivée de Fréchet, le théorème des fonctions implicites (appli. : équations différentielles), opérateurs de Fredholm (théorie de Riesz-Schauder), existence de points de bifurcation, appli. : problèmes aux limites nonlinéaires
   Bibliographie

   – Zeidler, E. : *Applied Functional Analysis, Main Principles and Their Applications; Applied Mathematical Sciences*, Vol. 109; Springer-Verlag, New York, 1995.

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option Proba

Introduction aux probabilités dans les espaces fonctionnels

Ch. Suquet

Ce cours présente quelques aspects des théorèmes limites pour des suites d'éléments aléatoires d'espaces de Banach, en focalisant en vue des applications sur le cas des espaces de fonctions. On aborde la généralisation à ces espaces de la loi forte des grands nombres, du théorème limite central et du théorème limite central fonctionnel. La géométrie de l'espace de Banach considéré joue ici un rôle important. En considérant un processus stochastique comme un élément aléatoire d'un espace fonctionnel supportant ses trajectoires, on obtient des applications statistiques des théorèmes limites, par exemple pour déterminer la loi asymptotique de statistiques de test.

- Éléments aléatoires d'un espace de Banach séparable (v.a. de Radon). Espérance (intégrale forte). Fonctionnelle caractéristique.
- Convergence en loi. Équitension, plate concentration, espaces Schauder décomposables.
- Éléments aléatoires gaussiens.
- Sommes d'éléments aléatoires indépendants.
- Type et cotype d'un espace de Banach.
- Lois des grands nombres.
- Théorème limite central. Exemples de T.L.C. dans des espaces de Banach particuliers.
- Théorème limite central fonctionnel de Kuelbs.
- TLC et TLCF dans les espaces de Hölder et applications statistiques.

Bibliographie

- Araujo, A., Giné, E. (1980), *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables.* Wiley, New York.
- Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability measures.* John Wiley & Sons, New York.
- Ledoux, M., Talagrand, M. (1991). *Probability in Banach Spaces.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Lifshits, M. (1995). *Gaussian Random Functions.* Kluwer, Dordrecht, Boston, London.

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option Proba

Martingales, Calcul Stochastique, Applications à la finance

Y. Davydov, A. Dermoune

Ce cours présente une introduction aux outils probabilistes nécessaires à la compréhension de certains modèles financiers. Les spécialistes de la finance ont recours depuis quelques années à des notions mathèmatiques de plus en plus sophistiqués, comme les martingales, intégrale de Itô, équations aux dérivées partielles, mouvement brownien. Le plan de ce cours est le suivant.

- Martingales.
- Mouvement brownien.
- Intégrale de Itô.
- Formule de Itô.
- Introduction aux marchés financiers : titres de base et produits dérivés, options européennes et américaines, les options négociables, les options de gré à gré.
- Arbitrages, modèle de Black-Scholes discret.
- Problème d'arrêt optimal et options américaines.
- Équations différentielles stochastiques.
- Modèle de Black-Scholes continu.
- Evaluation des options et équations aux dérivées partielles.
- Modèles de taux d'intérêt.

Bibliographie

- **L. Breiman**, Probability, Addison-Wesley, Reading, Mass (1968).
- **A. Dermoune**, Polycopié du cours de DEA 2003-2004.
- **D. Duffie**, Modèles dynamiques d'évaluation, Collection Finance PUF, (1994).
- **N. Elkaroui**, Modèles stochastiques en finance, Ecole Polytechnique, Edition 2000.
- **I. Gihman, A.V. Skorohod**, The theory of Stochastic Processes, Vol. 1, Springer (1974).
- **I. Karatzas, S. Shreve**, Brownian motion and Stochastic calculus, Springer (1987).
- **D. Lamberton, B. Lapeyre**, Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Ellipses (1997).
- **P. Wilmott**, Derivatives, The theory and practice of financial engineering, John Wiley and Sons (1998).
- **D. Williams** Probability with martingales, Cambridge University Press 1991.

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option Stat

Fiabilité des grands systèmes régénératifs
J.-L. Bon

L'objet du cours est la modélisation stochastique de la durée de fonctionnement de grands systèmes hautement réparables et les traitements associés à la fois dans ses aspects statistiques et probabilistes.

- **Notions de vieillissement**

La durée de vie d'un système est une notion intuitive qui nécessite une modélisation spécifique. A partir des différentes caractéristiques de la fiabilité utilisées dans l'industrie, on introduit plusieurs notions d'ordre stochastique et leurs propriétés respectives. Des tests statistiques permettent de rendre opérationnelles ces notions. Cela permet de comparer durées de vie et durées résiduelles d'où les notions de vieillissement. Il se trouve que les durées vieillissantes peuvent être efficacement approchées par des variables de lois exponentielles. Différents résultats d'approximation exponentielle sont proposées.

- **Systèmes markoviens**

Pour les systèmes réparables, il est d'usage d'utiliser des modèles markoviens bien qu'au niveau des composants l'approximation exponentielle peut paraître peu crédible. En fait dans ces cas aussi l'approximation exponentielle de la fiabilité apparaît très pertinente.

- **Modèles semi-markoviens et régénératifs**

On peut admettre des modélisations non markoviennes pour peu qu'il y ait des propriétés de régénération. Cela est raisonnable dans le cas de systèmes industriels très réparables. Ce sont les modèles régénératifs, ou semi-markoviens pour lesquels des approximations pessimistes sont possibles. Leur analyse conduit à l'étude de sommes aléatoires géométriques de durées de vie.

- **Sommes géométriques de durées de vie**

C'est un thème de recherche qui n'est pas propre à la fiabilité et en plein développement. Le calcul explicite des distributions correspondantes est quasiment impossible mais il existe d'agréables résultats d'approximation exponentielle les concernant. On justifie ainsi l'intérêt de la loi exponentielle pour approcher la fiabilité de grands systèmes réparables.

Bibliographie

- Kalashnikov V.V. (1997) *Geometric Sums : Bounds for Rare Events* Kluwer ;
- Kovalenko, Kuznetsov, Pegg (1997) *Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications.* Wiley.

Année universitaire 2004-2005
2ème trimestre
Option Stat

Statistique des processus : Modèles à longue mémoire

A. Philippe et M.-C. Viano

Mandelbrot dans les années 60 sugg 'era l'utilisation des processus à longue mémoire pour modéliser des phénomènes dont la corrélation décroît comme une fonction puissance. A partir de cette idée, les travaux théoriques et appliqués autour de ce thème se sont développés de façon exponentielle.

Partie I Les processus stationnaires. On commence ce cours par quelques généralités sur les processus stationnaires d'ordre deux :
- représentations spectrales,
- filtrage des processus d'ordre deux
- estimations non-paramétriques : estimation de la suite des covariances, du périodogramme.

Partie II Les modèles. On introduit les modèles à longue mémoire à partir de deux classes de modèles très populaires :
- le mouvement brownien fractionnaire
- les processus ARMA fractionnaires.

Partie III Estimation. On aborde les problèmes d'estimation du paramètre de longue mémoire (aussi appelé paramètre de *Hurst*). Deux approches sont principalement envisagées :
- *les méthodes temporelles :* les estimateurs construits à partir des variations quadratiques
- *les méthodes spectrales :* l'estimateur local de Whittle construit à partir du spectre.

Partie IV Applications. On donne quelques applications à la modélisation et à la prévision par des processus à longue mémoire. Les applications présentées sont principalement issues des domaines de l'hydrologie et des télécommunications.

Bibliographie

- Beran (1994) *Statistics for Long-Memory Processes* Chapman & Hall ;
- P.J. Brockwell and R.A. Davis. (1991) *Time Series : Theory and Methods.* Springer Series in Statistics. SpringerVerlag, 2 edition.
- *Theory and Applications of Long-Range Dependence* (2002) Eds Paul Doukhan, Murad Taqqu and Georges Oppenheim, Birkhuser
- Dacunha-Castelle D. Duflo M. (1983) *Probabilités et Statistiques :* vol.2. Problèmes à temps mobile. Masson. Boston.

Tableau récapitulatif des enseignements

Cours obligatoires

Ph. Heinrich	Analyse fonctionnelle appliquée
B. Beckermann & C. Brezinski & A. Philippe	Outils informatiques
Tous les enseignants	Projet d'initiation à la recherche

Options

Premier trimestre

C. Brezinski et B. Beckermann	Biorthogonalité et Applications
P. Deuring	Introduction à l'analyse des EDP et à leur résolution numérique
Yu. Davydov	Processus stochastiques
M-Cl. Viano	Eléments de Statistique Asymptotique

Deuxième trimestre

H. Sadok	Résolution numérique de problèmes linéaires et non linéaires
G. Albrecht et O. Gibaru	Géométrie de la CAO
S. de Bièvre et Th. Goudon	Modèles et méthodes mathématiques de la statistique physique
F. Ali Mehmeti	Equations d'évolution et Bifurcations
Ch. Suquet	Introduction aux probabilités dans les espaces fonctionnels
Yu. Davydov et A. Dermoune	Martingales, Calcul Stochastique : Applications à la finance
J-L. Bon	Fiabilité des grands systèmes régénératifs
A. Philippe et M.-C. Viano	Statistique des processus : Modèles à longue mémoire