Problèmes d'énergie minimale et Applications

Cours spécialisé en "Analyse Numérique et Approximation"
D.E.A. de Mathématiques Appliquées 2002

Bernhard Beckermann, Laboratoire ANO, Université de Lille 1

30/1/2002, 26/2/2002,

1 Polynômes orthogonaux et convergence des méthodes itératives

1.1 $L_p(\mu)$ et polynômes extrémaux

1.2 Le cas $p = 2$ des polynômes orthogonaux

1.3 Convergence du gradient conjugué

1.4 Convergence de GMRES: le cas normal

1.5 Convergence de GMRES: le cas non normal

1.6 Un exemple provenant de la discrétisation d'un problème de Stokes

1.7 Convergence des valeurs de Ritz

2 Electrostatique

2.1 Fonctions subharmoniques et le principe du maximum

Définition 2.1.1. *Une fonction f est dite subharmonique dans un domaine $G \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ si*
(a) $f : G \mapsto [-\infty, +\infty)$, *différente de la constante* $-\infty$,
(b) f *est s.c.s. (semi-continue supérieure), c-à-d, pour tout* $z \in G$ *nous avons*

$$\limsup_{x \to z} f(x) \le f(z),$$

(c) *pour tout z il existe un $r(z) > 0$ de sorte que, pour tout $r \in (0, r(z))$ (tout $r > r(\infty)$ si*

$z = \infty$),

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt \qquad \left(f(\infty) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,dt \quad si \quad z=\infty\right).$$

f est dite superharmonique si $-f$ est subharmonique. Finalement, f est dite harmonique dans G si f et $-f$ sont subharmoniques.

EXERCICE 2.1.2. *Vérifier qu'une fonction superharmonique est s.c.i. (semi-continue inférieure), et que $\{z \in G : f(z) > C\}$ est ouvert pour tout $C \in \mathbb{R}$. Finalement, montrer que, pour tout $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ fermé, $E \subset G$, f atteint son minimum sur E.*

EXERCICE 2.1.3. *Si f, g sont superharmoniques sur G, montrer que $f+g$ et $\min(f,g)$ le sont aussi.*

Bien entendu, les fonctions constantes sont harmoniques. Une classe plus riche est discutée dans l'exercice suivant.

EXERCICE 2.1.4 (PRÉAQUIS ANALYSE COMPLEXE: FORMULE DE CAUCHY). *Soit $g : G \mapsto \mathbb{C}$ holomorphe, $g \neq 0$, alors ses parties réelles et imaginaires sont harmoniques dans G. De plus, $|g|^p$, $p \geq 1$, et $\log|g|$ sont subharmoniques dans G.*

EXERCICE 2.1.5 (PRÉAQUIS ANALYSE COMPLEXE: NOYAU DE POISSON). *Soit $f \in \mathcal{C}^2(G)$, alors f est subharmonique dans G si et seulement si $\Delta f(z) = f_{x,x}(z) + f_{y,y}(z) \geq 0$ pour tout $z = x+iy \in G$ (voir [SaTo97, Theorem 0.5.5]).*

THÉORÈME 2.1.6. *Soit $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ un domaine, et f superharmonique sur G de sorte que*

$$\inf_{z\in\partial G}\ \liminf_{\zeta\to z,\zeta\in G} f(z) \geq M,$$

alors soit f coïncide avec la constante M soit $f(z) > M$ pour tout $z \in G$.

DÉMONSTRATION : Montrons d'abord que $f(z) \geq M$ pour tout G. Sinon, il existe un $\zeta \in G$ avec $f(\zeta) = M' < M$. D'après Exercice 2.1.2, le complémentaire de l'ensemble $E = \{z \in G : f(z) \leq M'\}$ dans G est un sous-ensemble ouvert de G, avec $\partial G \cap \partial E = \emptyset$ par construction de E et hypothèse. Donc E est un ensemble fermé de $\overline{\mathbb{C}}$ et, d'après Exercice 2.1.2, f atteint son minimum m sur E, qui d'après construction de E sera alors aussi le minimum de f dans G.

Soit $f(z_0) = m$. Montrons que f coïncide avec la constante m sur $B_{r(z_0)}(z_0)$. Effectivement, sinon on aurait un $t' \in [0, 2\pi]$ et un $r \in (0, r(z_0))$ ($r > r(z_0)$ si $z_0 = \infty$) avec $f(z+re^{it'}) > m$. Par la semi-continuité en t',

$$\liminf_{\delta\to 0}\ \min_{t\in[t'-\delta,t'+\delta]} f(z+re^{it}) > m,$$

ce qui donne ensemble avec la propriété 2.1.1(c)

$$m = f(z_0) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m\,dt = m,$$

une contradiction. Donc $f = m$ sur $B_{r(z_0)}(z_0)$. Comme G est connexe par hypothèse, nous trouvons pour tout $z \in G$ un nombre fini de points $z_1, ..., z_k$, $z_j \in B_{r(z_{j-1})}(z_{j-1})$ pour $j =$

$0, ..., k-1$, et $z = z_k$, ce qui implique que $f(z) = m$ pour tout $z \in G$, une contradiction au fait que $m < M$.

En conséquence, $f(z) \geq M$ pour tout $z \in G$. Si il y a égalité pour un z, alors en utilisant le même argument que dans le paragraphe précédent (avec $m = M$) on déduit que f est constant, ce qui montre le théorème. $\square$

Nous allons appliquer Théorème 2.1.6 souvent dans un contexte ou f sera aussi s.c.i. dans un voisinage de ∂G. Ici on obtient l'hypothèse suffisante suivante que $f(z) \geq M$ pour tout $z \in \partial G$. Notons également qu'il existe plusieurs généralisations de ce théorème ou on affaiblit les hypothèses [SaTo97, Theorem I.2.4].

2.2 Mesures de Borel

Rappelons que l'algèbre de Borel est la plus petite σ-algèbre comportant tous les ouverts et fermés de $\mathbb{C}$. Le support $S(\mu)$ d'une mesure de Borel μ est défini par $S(\mu) = \{z \in \mathbb{C} : \mu(B_r(z)) > 0 \forall r > 0\}$ (ensemble fermé), avec $B_r(z)$ la boule ouverte de rayon r centrée en z.

Dans la suite, on notera par $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de Borel à support compact, par $\mathcal{M}(K)$, $K \subset \mathbb{C}$ compact, l'ensemble des mesures de Borel μ avec $S(\mu) \subset K$, par $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_1(K)$ les sous-ensembles des mesures de probabilité (avec $||\mu|| := \mu(\mathbb{C}) = 1$). Rappelons que, d'après le Théorème de Riesz, une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ appartient au dual de $\mathcal{C}(K)$, l'ensemble des fonctions continues sur K. En utilisant la convergence induite, on dira qu'une suite $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(K)$ converge (faiblement) vers μ si

$$\forall f \in \mathcal{C}(K) : \qquad \lim_{n \to \infty} \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu.$$

Par exemple, les mesures

$$\int f \, d\delta_x = f(x), \qquad \int f \, d\delta_{x,r} = \int_0^{2\pi} f(x + re^{it}) \frac{dt}{2\pi}$$

appartiennent à $\mathcal{M}_1$, la première dite mesure de Dirac. On vérifie aisément que $\delta_{x,r} \to \delta_x$ pour $r \to 0+$. Concluons ce chapitre avec deux propriétés de base de $\mathcal{M}(K)$.

THÉORÈME 2.2.1 (DE HELLEY). *L'ensemble $\mathcal{M}_1(K)$ est faiblement compact: de toute suite dans $\mathcal{M}_1(K)$ on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers un élément dans $\mathcal{M}_1(K)$.*

DÉMONSTRATION : D'après le Théorème de Riesz, il suffit de remarquer qu'une boule dans l'espace dual de $\mathcal{C}(K)$ est faiblement compact. Voir aussi [SaTo97, Theorem 0.1.3] pour une démonstration directe. $\square$

THÉORÈME 2.2.2. *L'ensemble des mesures discrètes est dense dans $\mathcal{M}_1$: Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1$ il existe $x_{k,n} \in S(\mu)$ de sorte que*

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_{k,n}} \to \mu.$$

DÉMONSTRATION : Soit $K \subset K_0 := \{x + iy : |x| \le R, |y| \le R\}$, et $N = [n^{1/3}]$ (partie entière). Nous partitionons K_0 en $N \times N$ carrés Q_j semi-ouverts de cotés $2R/N$, $j = 1..., N^2$. Dans chaque carré, nous gardons comme points de masse $x_{k,n}$ exactement $k_{j,n} = [n\mu(Q_j)]$ éléments pas forcement distincts de $Q_j \cap S(\mu)$ (qui est non vide si $\mu(Q_j) > 0$), ce qui en total fait $m(n) = \sum k_{j,n}$ points, avec

$$-N^2/n + \sum \mu(Q_j) \le m(n)/n \le \sum \mu(Q_j) = ||\mu|| = 1,$$

et alors $m(n)/n \to 1$. Montrons que $\mu_n \to \mu$. Soit $f \in \mathcal{C}(K)$, c.-à-d., f est uniformément continue dans K. On trouve alors pour $\epsilon > 0$ un n_0 de sorte que, pour tout $n \ge n_0$, pour tout j et pour tout $x, y \in Q_j$ nous avons $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Par conséquent, avec $y_j \in Q_j$

$$\begin{aligned}
&|\int f\,d\mu - \int f\,d\mu_n| \le \sum_j |\int_{Q_j} f\,d\mu - \frac{1}{n}\sum_{x_{k,n}\in Q_j} f(x_{k,n})| \\
&\le \sum_j |\int_{Q_j} f\,d\mu - \frac{k_{j,n}}{n} f(y_j)| + \frac{m(n)}{n}\epsilon \\
&\le \sum_j |\int_{Q_j} f\,d\mu - \mu(Q_j) f(y_j)| + \frac{m(n)}{n}\epsilon + (1 - \frac{m(n)}{n}) \max_{z\in K} |f(z)| \\
&\le (1 + \frac{m(n)}{n})\epsilon + (1 - \frac{m(n)}{n}) \max_{z\in K} |f(z)|
\end{aligned}$$

ce qui est $< 3\epsilon$ pour n suffisamment grand. Finalement, pour obtenir une mesure discrète $\mu_n \in \mathcal{M}_1(S(\mu))$, on peut ajouter encore $n - m(n)$ autres points quelconques de $S(\mu)$ ce qui laisse invariant la limite de (μ_n) car $(n - m(n))/n \to 0$. □

2.3 Energie et potentiel

Dans ce chapitre on introduira quelques notions de base de l'electrostatique dans le plan. En Physique on a appris que le potentiel électrique V d'un matériel dans l'espace $\mathbb{R}^3$ avec charge unitaire ρ et son énergie sont donné par

$$V(y) = -\int \frac{\rho(x)\,dx}{|x - y|}, \quad I = \int V(y)\rho(y)\,dy.$$

Dans la suite on supposera que toute charge unitaire sera invariante par rapport à une coordonnée. En introduisant des coordonnées cylindriques, on se ramène alors à des intégrales ou le noyau $-1/|x|$ dans $\mathbb{R}^3$ est remplacé par $k(z) = \log(1/|z|)$ dans $\mathbb{R}^2$. Notons que k est le potentiel électrique d'un fil avec charge unitaire homogène situé sur une axe de l'espace. Aussi, pour une charge unitaire plan donnée par une mesure de Borel, le potentiel électrique est calculé en Physique par une superposition de fils (une intégrale).

La fonction k n'étant pas continue dans $\mathbb{C}$, une telle intégrale sera introduite mathématiquement en considérant les noyaux régularisés $k^\eta(z) := \min\{\eta, k(z)\}$ pour $\eta \in \mathbb{R}$ (qui sont continus). Néanmoins, le lien avec la Physique nous permet de mieux comprendre la notion d'équilibre.

DÉFINITION 2.3.1 (ENERGIE MUTUELLE). *Pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}(K)$, on définit l'énergie mutuelle*

$$I(\mu, \nu) := \lim_{\eta\to+\infty} \iint_{K\times K} k^\eta(x - y)\,d(\mu \times \nu)(x, y) \in (-\infty, +\infty].$$

$I(\mu) := I(\mu,\mu)$ est dite l'énergie de μ. Finalement, on notera par $\mathcal{M}^f$ l'ensemble des mesures dans $\mathcal{M}$ ayant une énergie finie (et d'une manière similaire on définit $\mathcal{M}_1^f$, $\mathcal{M}^f(K)$, $\mathcal{M}_1^f(K)$).

Notons que la limite existe toujours car l'intégrale est croissante en η. Une propriété de base est discutée dans

Théorème 2.3.2 (de semi-continuité). *Si $\mu_n \in \mathcal{M}(K)$, $\nu_n \in \mathcal{M}(K')$, $\mu_n \to \mu$, $\nu_n \to \nu$, alors $I(\mu,\nu) \le \liminf_{n\to\infty} I(\mu_n,\nu_n)$, et $I(\mu,\nu) = \lim_{n\to\infty} I(\mu_n,\nu_n)$ si K et K' sont disjoints.*

Démonstration : Comme $(x,y) \mapsto k^\eta(x-y)$ est continue sur $K \times K'$ et $k^\eta \le k$, nous avons par définition de la convergence faible pour tout $\eta > 0$

$$\begin{aligned}\iint_{K\times K'} k^\eta(x-y)\,d(\mu\times\nu)(x,y) &= \lim_{n\to\infty} \iint_{K\times K'} k^\eta(x-y)\,d(\mu_n\times\nu_n)(x,y)\\ &\le \liminf_{n\to\infty} \iint_{K\times K'} k(x-y)\,d(\mu_n\times\nu_n)(x,y).\end{aligned}$$

Un passage $\eta \to \infty$ donne la première propriété. Finalement, si $K \cap K' = \emptyset$, disons, $\mathrm{dist}(K,K') > e^{-\eta'}$ pour un $\eta' \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\eta > \eta'$ et pour tout $(x,y) \in K \times K'$ nous avons $k^\eta(x,y) = k(x,y)$, ce qui implique la dernière propriété. $\square$

Lemme 2.3.3. *Nous avons*

$$I(\mu,\nu) = \int d\mu(x) V^\nu(x) = I(\nu,\mu), \qquad V^\nu(z) := \lim_{\eta\to+\infty} \int k^\eta(x-y)\,d\mu(x).$$

Démonstration : La fonction $(x,y) \to k^\eta(x-y)$ étant continue sur le compact $K \times K$, nous obtenons d'après le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}I(\mu,\nu) &= \lim_{\eta\to\infty} \iint_{K\times K} k^\eta(x-y)\,d(\mu\times\nu)(x,y)\\ &= \lim_{\eta\to\infty} \int d\mu(x) \int k^\eta(x-y)\,d\nu(y) = \lim_{\eta\to\infty} \int d\nu(y) \int k^\eta(x-y)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Reste à montrer qu'on peut échanger le passage à la limite $\eta \to \infty$ avec la première intégrale. Les fonctions à examiner sont croissantes en η, donc cet échange se justifie en appliquant le théorème de Lebesgue sur la convergence monotone [Rud70, p. 21]. $\square$

Définition 2.3.4. *La fonction*

$$z \mapsto I(\delta_z,\nu) = V^\nu(z) = \int \log(\frac{1}{|z-x|} d\nu(x) \in (-\infty, +\infty]$$

du Lemme 2.3.3 est dite potentiel de ν.

Nous obtenons alors le potentiel électrique V^ν et l'énergie électrique $I(\nu)$ d'une charge électrique positive $\nu \in \mathcal{M}$ comme mentionné dans l'introduction, en particulier celui d'un fil:

$V^{\delta_x}(z) = k(z-x) = \log(1/|z-x|)$, et $I(\delta_x) = +\infty$. Avant de discuter leur propriétés, mentionnons que $-\log|P|$ pour un polynôme monic P peut être considéré comme potentiel d'un système à plusieurs fils: effectivement, en introduisant la mesure de comptage

$$\nu_n(P) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j} \in \mathcal{M}_1, \quad P(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j),$$

nous obtenons $V^{\nu_n(P)}(z) = -\log(|P(z)|^{1/n})$. Comme de plus l'ensemble des mesures de comptage est dense dans $\mathcal{M}_1$, il semble clair que l'électrostatique dans le plan est un cadre adapté pour étudier l'asymptotique des problèmes extremaux polynômiaux du chapitre §1.1. Par exemple, le comportement pour $n \to \infty$ de la constante $\log(1/K^E_{n,\infty}(\infty)^{1/n})$ pour un compact E devrait être liée à

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \inf_{z \in E} V^\mu(z).$$

Le lien exact sera étudié dans la suite.

EXERCICE 2.3.5. *Vérifier que chaque fois on détermine le potentiel d'une mesure de probabilité, et que l'on obtient les formules explicites*

$$\int k(z-y)\, d\delta_{x,r}(y) = k^{\log(1/r)}(z-x), \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R k(z-re^{it})\,\frac{dtrdr}{\pi R^2} = \begin{cases} \log(1/|z|), & |z| \geq R \\ \log(1/R) + \frac{R^2-|z|^2}{2R^2}, & |z| \leq R \end{cases} \tag{2}$$

$$\int_a^b k(z-x)\,\frac{dx}{b-a} = \log(\frac{1}{b-a}) + 1 + \frac{z-b}{b-a}\log|\frac{z-b}{b-a}| - \frac{z-a}{b-a}\log|\frac{z-a}{b-a}|,\ a,z,b \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\int_a^b \frac{k(z-x)\,dx}{\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \log(\frac{4}{b-a}) - \log(|w\cdot(1+\sqrt{1-1/w^2})|),\ w = \frac{2z-a-b}{b-a} \tag{4}$$

(la dernière formule étant valable pour $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ pour obtenir une racine unique).

COROLLAIRE 2.3.6 ("LOWER ENVELOPPE PRINCIPLE"). *Si $\mu_n \in \mathcal{M}(K)$, $\mu_n \to \mu$, et $z_n \to z$, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} V^{\mu_n}(z_n) \geq V^\mu(z).$$

DÉMONSTRATION : Choisir $\nu_n = \delta_{x_n}$ dans Théorème 2.3.2. □

COROLLAIRE 2.3.7. *Le potentiel V^μ d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ est superharmonique dans $\mathbb{C}$ et harmonique dans $\mathbb{C} \setminus S(\mu)$.*

DÉMONSTRATION : La propriété (a) est évidente. Pour établir la propriété (b) de (semi) continuité, nous choisissons $(\mu_n, \nu_n) = (\mu, \delta_{x_n})$ dans Théorème 2.3.2. Finalement, rappelons que, par formule (1) et Lemme 2.3.3,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^\mu(x+re^{it})\,dt = I(\delta_{x,r}, \mu) = \int k^{\log(1/r)}(x-y)\,d\mu(y)$$

le second membre étant $\leq V^\mu(x)$ par définition pour tout $r > 0$, et $= V^\mu(x)$ pour tout r suffisamment petit si $x \notin S(\mu)$. □

Exercice 2.3.8. *Montrer que $\mu \in \mathcal{M}^f$ implique que*

$$\lim_{c\to\infty} \mu(\{z : V^\mu(z) > c\}) = 0 \quad (\textit{ouvert}) \quad \Longrightarrow \quad \forall x : \quad \lim_{r\to 0} \mu(B_r(x)) = \mu(\{x\}) = 0.$$

Nous terminons ce chapitre par deux propriétés assez techniques qui seront cependant importants pour la suite.

Théorème 2.3.9 (Forme faible du "Principle of domination"). *Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, $||\mu|| \geq ||\nu||$, et V^ν continue dans un voisinage de $S(\mu)$. Si il existe des constantes c_1, c_2 avec*

$$V^\mu(z) \leq c_1 + V^\nu(z) \qquad \textit{et} \qquad V^\mu(z) \leq c_2$$

pour tout $z \in S(\mu)$, alors ces inégalités restent valables pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration : Considérons

$$u(z) = V^\nu(z) - V^\mu(z) = u_0(z) + (||\mu|| - ||\nu||) \log|z|, \quad u_0(z) = \int \log(1 - \frac{x}{z}) d(\nu - \mu)(x).$$

On vérifie aisément que u_0 est harmonique dans un voisinage de ∞, avec $u_0(\infty) = 0$. Ensemble avec Corollaire 2.3.7 on en déduit que u est superharmonique dans G, une composante connexe quelconque de $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu)$. Montrons que l'hypothèse implique que

$$\inf_{z\in\partial G} \liminf_{\zeta\to z, \zeta\in G} u(z) \geq -c_1, \tag{5}$$

car dans ce cas l'inégalité $V^\mu \leq c_1 + V^\nu$ est une conséquence de Théorème 2.1.6 du principe du minimum (et $V^\mu \leq c_2$ est obtenu en prenant $\nu = 0$). Effectivement, si V^μ est continue dans $\mathbb{C}$, u serait continue dans un voisinage de $S(\mu)$ et (5) serait valable par continuité. Les choses se compliquent un peu si V^μ n'est pas continue. Par absurde, supposons que (5) soit faux. Il existe alors $G \ni z_n \to z \in \partial G \subset S(\mu)$ et $\epsilon > 0$ avec

$$\liminf_{n\to\infty} u(z_n) \leq -c_1 - \epsilon.$$

Suivant le raisonnement permettant d'obtenir (6) ci–dessous, on observe d'abord que $(V^\mu(z_n))_{n\geq 0}$ est bornée supérieurement car V^μ est bornée sur $S(\mu)$ par hypothèse. Comme V^ν est continue en z, on en déduit que

$$V^\nu(z) - \limsup_{n\to\infty} V^\mu(z_n) \leq -c_1 - \epsilon,$$

et $V^\nu(z) < \infty$. Par hypothèse, $V^\mu(z) < \infty$ et alors $\mu(\{z\}) = 0$. En conséquence, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une boule fermée B_ϵ centrée en z de sorte que $0 < \mu(B_\epsilon) < \epsilon/\log(4)$. Notons par y_n un élément le plus proche de z_n dans $S(\mu) \cap B_\epsilon$, alors $y_n \to z$ pour $n \to \infty$. Aussi, par construction nous avons pour $y \in S(\mu) \cap B_\epsilon$ la relation

$$2|y - x_n| \geq |y - x_n| + |y_n - x_n| \geq |y_n - y|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} V^\mu(x_n) &= \int_{B_\epsilon} \log(\frac{1}{|y - x_n|} d\mu(y) + \int_{S(\mu)\setminus B_\epsilon} \log(\frac{1}{|y - x_n|}) d\mu(y) \\ &\leq \mu(B_\epsilon) \log(2) + V^\mu(y_n) + \int_{S(\mu)\setminus B_\epsilon} \log(\frac{|y - y_n|}{|y - x_n|}) d\mu(y), \end{aligned} \tag{6}$$

la dernière intégrale convergeant vers zéro si $n \to \infty$. En utilisant encore une fois la continuité de V^ν en z plus l'hypothèse $V^\mu(y_n) \leq c_1 + V^\nu(y_n)$, nous obtenons

$$\limsup_{n\to\infty} V^\mu(x_n) \leq \mu(B_\epsilon)\log(2) + \limsup_{n\to\infty} V^\mu(y_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + c_1 + \limsup_{n\to\infty} V^\nu(y_n)$$

la dernière expression étant égale à $\epsilon/2 + c_1 + V^\nu(y)$, en contradiction avec la définition de ϵ. Donc (5) est valable et le théorème démontré. □

Une démonstration moins élémentaire du principe de domination (sous des hypothèses moins restrictives) peut être trouvée dans [NiSo88, Theorem 5.2.5]. Selon [SaTo97, Theorem 2.3.1], on peut affaiblir les hypothèses comme suit: si $\mu \in \mathcal{M}^f$, $\nu \in \mathcal{M}$, $||\mu|| \geq ||\nu||$ et si $V^\mu \leq M + V^\nu$ μ–presque partout pour une constante M alors cette inégalité est valable partout dans $\mathbb{C}$.

Une conséquence du Théorème 2.3.9 (avec $\nu = 0$) est donnée dans

Corollaire 2.3.10 ("Continuity principle"). *Soit $\mu \in \mathcal{M}$. Si la restriction du potentiel V^μ sur $S(\mu)$ est continue alors V^μ est continue dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration : Voir par exemple [NiSo88, Theorem 5.1.4]. □

Pour $\mu, \nu \in \mathcal{M}^f$, on définira l'énergie de la charge $\mu - \nu$ (de signe variable) par

$$I(\mu - \nu) := I(\mu) + I(\nu) - 2I(\mu, \nu) \in [-\infty, \infty).$$

Notons que cette définition est indépendante de la décomposition d'une charge car, par hypothèse,

$$\begin{aligned} I(\mu - \nu) &= I(\mu) + I(\nu) - 2\lim_{\eta\to\infty} \iint k^\eta(x-y)\, d(\mu \times \nu)(x,y) \\ &= \lim_{\eta\to\infty} \iint k^\eta(x-y)\, d((\mu-\nu)\times(\mu-\nu))(x,y). \end{aligned}$$

La positivité d'une telle énergie jouera un rôle important:

Théorème 2.3.11. *Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}^f$, avec $||\mu|| = ||\nu||$. Alors $I(\mu - \nu) \geq 0$, et $I(\mu - \nu) = 0$ si et seulement si $\mu = \nu$.*

Démonstration : Il est montré dans [SaTo97, p.33] (par calcul direct) et dans [NiSo88, p.172] (à l'aide des distributions) que

$$I(\mu - \nu) = \frac{1}{2\pi} \int \Big[\int \frac{d\mu(y)}{|x-y|} - \int \frac{d\nu(y)}{|x-y|} \Big]^2 dm(x),$$

$m()$ étant la mesure de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$, et donc $I(\mu - \nu) \geq 0$. En particulier nous concluons que

$$2 \cdot ||\mu^*|| \cdot ||\nu^*|| I(\mu^*, \nu^*) \leq ||\mu^*||^2 \cdot I(\nu^*) + ||\nu^*||^2 \cdot I(\mu^*)$$

est fini pour tout $\mu^*, \nu^* \in \mathcal{M}^f$, ce qui permet de définir l'énergie mutuelle $I(\cdot,\cdot)$ pour deux différences d'éléments de $\mathcal{M}^f$ par linéarité (ou directement par l'intégrale du noyau régularisé comme pour l'énergie).

Soit maintenant $I(\mu-\nu)=0$. Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et pour tout $0<r<R<1$

$$0\le I(\mu-\nu+\lambda(\delta_{z,R}-\delta_{z,r}))=\lambda I(\mu-\nu,\delta_{z,R}-\delta_{z,r})+\lambda^2 I(\delta_{z,R}-\delta_{z,r}),$$

ce qui implique que

$$I(\mu-\nu,\delta_{z,R}-\delta_{z,r})=0.$$

En utilisant (1) et le fait que $x\mapsto k^{\log(1/r)}(x-z)-k^{\log(1/R)}(x-z)$ est égal a la constante 0 en dehors de $B_R(z)$, égal à $\log(R/r)$ dans $B_r(z)$ et sinon de valeur dans $[0,\log(R/r)]$, nous obtenons

$$\log(R/r)\mu(B_r(z))\le I(\mu,\delta_{z,R}-\delta_{z,r})=I(\nu,\delta_{z,R}-\delta_{z,r})\le\log(R/r)\nu(B_R(z))$$

et alors $\mu(B_r(z))\le\nu(B_R(z))$ pour tout $0<r<R<1$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$. Notons également que cette relation reste valable si on échange les mesures μ et ν. En conséquence, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et pour tout $R\in(0,1)$

$$\mu(B_R(z))=\lim_{r\to R-0}\mu(B_r(z))\le\nu(B_R(z))=\lim_{r\to R-0}\nu(B_r(z))\le\mu(B_R(z)),$$

ce qui implique que $\mu=\nu$. □

Exercice 2.3.12. **(a)** *Soient $\mu,\nu\in\mathcal{M}^f$. Vérifier que s'il existe une constante $M\in\mathbb{R}$ de sorte que $V^\mu=V^\nu+M$ dans $\mathbb{C}$ alors $\mu=\nu$.*
(b) *Soient $\mu,\nu\in\mathcal{M}^f(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ le disque d'unité. Vérifier que $I(\mu-\nu)\ge 0$ (on envisagera d'ajouter un multiple de la mesure $\delta_{0,1}$).*
(c) *Montrer que, pour tout $\mu\in\mathcal{M}^f(\mathbb{D})$, $I(\mu)\ge 0$, avec égalité si et seulement si $\mu=\delta_{0,1}$.*

2.4 Un problème extremal en électrostatique

Considérons le problème de trouver l'équilibre d'une charge unitaire positive sur un conducteur compact E qui est exposé à un champs extérieur f fixe (par exemple le potentiel une charge négative sur un matériel isolant). Mathématiquement, nous obtenons le problème suivant qui a été déjà évoqué par Gauss.

Définition 2.4.1. *Pour E compact, $f\in\mathcal{C}(E)$ et $\mu\in\mathcal{M}(E)$, soit $I_f(\mu)=I(\mu)+2\int f\,d\mu$. Trouver*

$$W_{f,E}:=\inf\{I_f(\mu):\mu\in\mathcal{M}_1(E)\},$$

et (si possible) une mesure extremale $\mu_{f,E}$ avec $I_f(\mu_{f,E})=W_{f,E}$.

Notons que $W_{f,E}<\infty$ ssi $W_{0,E}<\infty$ ssi il existe une mesure $\mu\in\mathcal{M}_1(E)$ avec $I(\mu)<\infty$ (c.-à-d., $\mathcal{M}_1^f(E)\neq\emptyset$).

Définition 2.4.2 (Capacité logaritmique). *La capacité logarithmique d'un ensemble compact E est donnée par $\operatorname{cap}(E):=\exp(-W_{0,E})$. Plus généralement, pour un ensemble F de Borel,*

$$\operatorname{cap}(F):=\sup\{\operatorname{cap}(E):E\subset F\text{ compact}\}.$$

On dit qu'une propriété est vrai quasi partout (q.p.) si elle est vrai à un ensemble de Borel de capacité 0 près.

Notons que *cap*() n'est pas une mesure (pas additive), mais comparable à certains mesures. Aussi, on voit aisément que si E est fini alors $cap(E) = 0$.

EXERCICE 2.4.3. *Montrer que*
(a) $F \subset E$, $\mathrm{cap}(E) = 0$ *implique que* $\mathrm{cap}(F) = 0$.
(b) $I(\mu) < \infty$, *E ensemble de Borel avec* $\mathrm{cap}(E) = 0$, *implique que* $\mu(E) = 0$.
(c) *En s'inspirant de l'Exercice 2.3.12, montrer que* $\mathrm{cap}(\mathbb{D}) = \mathrm{cap}(\partial\mathbb{D}) = 1$.

LEMME 2.4.4. *Si* $\mathrm{cap}(E) > 0$ *alors une mesure extremale* $\mu_{f,E}$ *existe et est unique. De plus, pour tout* $\nu \in \mathcal{M}_1(E)$ *nous avons*

$$w_{f,E} := I(\mu_{f,E}) + \int f \, d\mu_{f,E} \leq I(\nu, \mu_{f,E}) + \int f \, d\nu.$$

DÉMONSTRATION : Soit $\mu_n \in \mathcal{M}_1(E)\}$ avec

$$\lim_{n\to\infty} I_f(\mu_n) = \inf\{I_f(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_1(E)\}.$$

Par le Théorème 2.2.1 de Helley, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers un $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$. Notons que $\liminf I_f(\mu_n) \geq I_f(\mu)$ par le Théorème 2.3.2 de semi-continuité, et donc μ est une mesure extremale.

Pour montrer unicité, soit $\mu' \in \mathcal{M}_1(E)$ une autre mesure avec $I_f(\mu') = I_f(\mu) = W_{f,E}$. Rappelons que $W_{f,E} < \infty$ par hypothèse sur E, et alors $\mu, \mu' \in \mathcal{M}^f$. Nous observons que

$$I_f(\frac{\mu' + \mu}{2}) - \frac{1}{2}[I_f(\mu) + I_f(\mu')] = I(\frac{\mu' + \mu}{2}) - \frac{1}{2}[I(\mu) + I(\mu')] = -I(\frac{\mu' - \mu}{2}).$$

Comme la dernière expression est négative par Théorème 2.3.11, nous obtenons $I_f(\frac{\mu'+\mu}{2}) \leq I_f(\mu)$. D'autre part, $(\mu+\mu')/2 \in \mathcal{M}_1(E)$, et alors $I_f(\frac{\mu'+\mu}{2}) = I_f(\mu)$ par définition de μ. Par conséquent, $I(\mu' - \mu) = 0$, et Théorème 2.3.11 nous permet d'obtenir l'unicité $\mu = \mu'$.

Finalement, pour établir la dernière propriété, nous observons que, pour tout $a \in (0, 1]$, nous avons $a\nu + (1 - a)\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, et alors

$$0 \leq I_f(a\nu+(1-a)\mu) - I_f(\mu) = a^2 I(\nu) + 2a(1-a)I(\mu,\nu) + (a^2 - 2a)I(\mu) + 2a \cdot [\int f \, d\nu - \int f \, d\mu].$$

En divisant par $2a$ et en faisant tendre $a \to 0$ nous gardons

$$0 \leq I(\mu, \nu) - I(\mu) + \int f \, d\nu - \int f \, d\mu,$$

comme énoncé. $\square$

EXERCICE 2.4.5. *Soit $\mathcal{N}$ un sous-ensemble convexe et fermé de* $\mathcal{M}_1(E)$. *Généraliser Lemme 2.4.4 pour caractériser des solutions extremales du problème* $\inf\{I_f(\mu) : \mu \in \mathcal{N}\}$.

THÉORÈME 2.4.6. *Soit* $w_{f,E} = W_{f,E} - \int f \, d\mu_{f,E}$ *comme dans Lemme 2.4.4. Alors*

$$V^{\mu_{f,E}} + f \geq w_{f,E} \qquad \text{q.p. dans } E, \text{ et} \tag{7}$$

$$V^{\mu_{f,E}} + f \leq w_{f,E} \qquad \text{dans } S(\mu_{f,E}). \tag{8}$$

Réciproquement, s'il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et une constante w avec

$$\begin{array}{ll} V^\mu + f \geq w & \textit{q.p. dans } E \\ V^\mu + f \leq w & \textit{dans } S(\mu) \end{array}$$

alors $\mu = \mu_{f,E}$.

Démonstration : Par la semi-continuité de $V^{\mu_{f,E}}$, l'ensemble

$$E' = \bigcup_{\epsilon > 0} \{z \in E : V^{\mu_{f,E}} + f(z) \leq w_{f,E}\}$$

est un ensemble de Borel (union infinie d'ensembles compacts). Pour établir (7), montrons par absurde que $cap(E') = 0$. Sinon, il existe un ensemble compact $K \subset E'$ avec $cap(K) > 0$. Par définition de la capacité, nous trouvons un $\nu \in \mathcal{M}_1^f(K)$. Comme $V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x) < w_{f,E}$ pour $x \in K$ par définition de E',

$$I(\mu_{f,E}, \nu) + \int f \, d\nu = \int [V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x)] \, d\nu < w_{f,E},$$

en contradiction avec Lemme 2.4.4.

Montrons maintenant (8) par absurde. Sinon, il existe un $x \in S(\mu_{f,E})$ avec $V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x) > w_{f,E}$. Comme $V^{\mu_{f,E}} + f$ est s.c.i., il existe un $r > 0$ avec $V^{\mu_{f,E}} + f > w_{f,E}$ dans $B_r(x)$, et $\mu_{f,E}(B_r(x)) > 0$ car $x \in S(\mu_{f,E})$. Comme $\mu_{f,E}(E') = 0$ par Exercice 2.4.3(b), nous déduisons de (7)

$$\begin{aligned} w_{f,E} &= W_{f,E} - \int f \, d\mu_{f,E} = \int [V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x)] \, d\mu_{f,E}(x) \\ &= \int_{B_r(x)} [V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x)] \, d\mu_{f,E}(x) + \int_{S(\mu) \setminus B_r(x)} [V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x)] \, d\mu_{f,E}(x) \\ &> w_{f,E} \cdot \mu(B_r(x)) + w_{f,E} \cdot \mu(S(\mu_{f,E}) \setminus B_r(x)) = w_{f,E}, \end{aligned}$$

une contradiction.

Finalement, soit μ comme décrite dans la dernière partie. La deuxième condition nous permet de conclure que μ admet un potentiel borné sur $S(\mu)$, et alors $\mu, \mu_{f,E} \in \mathcal{M}_1^f(E)$. Tenant compte de l'Exercice 2.4.3(b), nous obtenons

$$\begin{array}{llll} V^\mu + f = w & \text{et} & V^{\mu_{f,E}} + f \geq w_{f,E} & \mu\text{–presque partout,} \\ V^\mu + f \geq w & \text{et} & V^{\mu_{f,E}} + f = w_{f,E} & \mu_{f,E}\text{–presque partout.} \end{array}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I(\mu - \mu_{f,E}) &= \int [V^{\mu_{f,E}} - V^\mu] d\mu_{f,E} + \int [V^\mu - V^{\mu_{f,E}}] d\mu \\ &= w + w_{f,E} - \int [f + V^\mu] d\mu_{f,E} - \int [V^{\mu_{f,E}} + f] d\mu \leq 0, \end{aligned}$$

et alors $\mu = \mu_{f,E}$ d'après Théorème 2.3.11. □

En §2.5 on montrera que, pour E suffisamment régulier, l'ensemble d'exception dans (7) est vide, et alors $V^{\mu_{f,E}} + f = w_{f,E}$ sur $S(\mu_{f,E})$. En utilisant le principe de continuité du Corollaire 2.3.10, on en déduit que la mesure extremale $\mu_{f,E}$ admet un potentiel continu dans $\mathbb{C}$.

Conditions (7) et (8) sont appelées les conditions d'équilibre pour une mesure extremale (ou d'équilibre). Effectivement, en Physique on sait que l'équilibre sans champs extérieur ($f = 0$) est caractérisé par le fait que le potentiel électrique est constant sur le condensateur, et ici $S(\mu) \subset \partial E$ (effet de la cage de Faraday). Si on ajoute un champs extérieur, le potentiel électrique devrait être constant sur $S(\mu)$ et $\geq$ à cette constante ailleurs en E (où il n'y pas de charges).

Notons que la deuxième partie du Théorème nous permet de vérifier si une mesure donnée est une mesure d'équilibre. Par exemple, il découle des formules (1) et (4) que

$$\mu_{0,x+r\mathbb{D}} = \delta_{x,r}, \quad cap(x + r\mathbb{D}) = r,$$

et que

$$\frac{d\mu_{0,[a,b]}}{dx} = \frac{dx}{\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad \text{pour } x \in [a,b], \quad cap([a,b]) = \frac{b-a}{4}.$$

Exercice 2.4.7. *Vérifier que si $a, b \in \mathbb{C}$ alors $\mathrm{cap}(a + bE) = |b| \cdot \mathrm{cap}(E)$.*

Exercice 2.4.8. *Vérifier que $S(\mu_{f,E})$ ne contient pas un point isolé de E.*

Exercice 2.4.9 (Caractérisation des points d'exception). *Supposons que $x \in E$ ne soit pas isolé dans le sens suivant: pour tout $r > 0$ nous avons $\mathrm{cap}(E \cap B_r(x)) > 0$ (par exemple si x est dans l'intérieur de E). Montrer que si $x \notin S(\mu)$ alors $V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x) \geq w_{f,E}$ (pensez à la continuité).*

Exercice 2.4.10 (Intérieur du support). *On utilisera la formule*

$$\lim_{r \to 0+} I(\delta_{x,r}, \mu) = V^{\mu}(x)$$

et Exercice 2.4.3(b) pour montrer que $V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x) = w_{f,E}$ pour tout x appartenant à l'intérieur de $S(\mu_{f,E})$.

Exercice 2.4.11 (Caractérisation des champs harmoniques). *Supposons que f soit harmonique dans un voisinage de E. Utiliser l'exercice précédent pour montrer par absurde que l'intérieur de $S(\mu_{f,E})$ est vide.*

Exercice 2.4.12 (Equilibre sans champs extérieur). *Soit E compact, de capacité positive.*
(a) *Montrer que $\mathrm{cap}(E) = \mathrm{cap}(S(\mu_{0,E}))$.*
(b) *En utilisant le principe de domination, vérifier que $V^{\mu_{0,E}} \leq w_{0,E}$ partout dans $\mathbb{C}$, avec égalité q.p. dans E.*
(c) *Notons par Ω_E la composante connexe non bornée de $\overline{\mathbb{C}} \setminus S(\mu_{0,E})$. Vérifier que $V^{\mu_{0,E}}(x) < w_{0,E}$ pour $x \in \Omega_E$. En déduire que $V^{\mu_{0,E}}(x) < w_{0,E}$ pour un point isolé de E appartenant à Ω_E, et que l'intérieur de E admet une intersection vide avec Ω_E.*
(d) *Soit $F := \mathbb{C} \setminus \Omega_E$. Utiliser la même idée que dans l'Exercice 2.4.10 pour montrer que $V^{\mu_{0,F}}$ est constant dans l'intérieur de F. En déduire que $S(\mu_{0,F}) \subset \partial F = \partial\Omega_E$. Comparer $\mu_{0,F}$ avec $\mu_{0,E}$.*
(e) *En déduire des parties précédents le principe de la cage de Faraday*

$$\mu_{0,E} = \mu_{0,\partial\Omega_E} = \mu_{0,\partial E} = \mu_{0,\mathbb{C}\setminus\Omega_E}.$$

Exercice 2.4.13 (Champs étant un potentiel). *Soit* $\sigma \in \mathcal{M}(E)$ *avec potentiel continu, de masse* $t := ||\sigma|| \in [0,1]$, *et* $f(x) = -V^\sigma(x)$. *Montrer que* $\mu_{f,E} = \sigma + (1-t) \cdot \mu_{0,E}$.

2.5 Régularité

Dans une remarque concernant Théorème 2.4.6, nous avons déjà mentionné que souvent l'ensemble d'exception dans Théorème 2.4.6 est vide, en particulier si E est un cercle, un disque, l'union fini d'intervalles, etc. Le but de ce chapitre est de préciser cette propriété.

Nous avons la définition suivante de régularité.

Définition 2.5.1. *Soit* E *compact. Un point* $x \in E$ *est dit régulier (par rapport à* E*) si*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{\log(1/\mathrm{cap}(A_j(x))} = +\infty, \qquad A_n(x) = \{z \in E : 2^{-j-1} \leq |z-x| \leq 2^j\}.$$

E est dit régulier si chaque élément est régulier.

On trouve dans [SaTo97, Appendix A, Theorem A.1.1] une preuve du Théorème de Wiener disant que $V^{\mu_{0,E}}(x) = W_{0,E}$ pour un $x \in E$ ssi x est régulier. Aussi, le lien avec des valeurs au bord de la solution d'un problème de Dirichlet sur une composante connexe de $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ avec comme condition au bord une fonction continue y est évoqué.

Si E est le bord d'un domaine simplement connexe Ω, alors en utilisant le lien avec l'application conforme de Riemann de Ω vers $\mathbb{D}$ (voir analyse complexe) on peut montrer que E est régulier. Par conséquent, un cercle (et un disque) est régulier.

Exercice 2.5.2 (Regularité).
(a)* *Soit* $x \in E$ *et* $K > 0$ *de sorte que, pour tout* $r > 0$ *suffisamment petit,* $\mathrm{cap}(\{y \in E : |y-x| \leq r\}) \geq r^K$ *("K-property" de [NiSo88, § 5.4.3]). Montrer que* x *est régulier par rapport à* E.
(b) *Montrer que tout point intérieur d'un ensemble compact* E *est régulier.*
(c) *Montrer qu'un segment est régulier.*
(d) *Soient* $F \subset E \subset \mathbb{C}$ *compact, et* $x \in F$ *régulier par rapport à* F. *Montrer que* x *est régulier par rapport à* E.
(e) *Soient* $E_1, ..., E_m$ *des ensembles compacts réguliers. Montrer que leur union est aussi régulier.*
(f) *En s'inspirant de l'exercice 2.4.12, montrer que l'ensemble des* $x \in E$ *n'étant pas régulier par rapport à* E *est de capacité* 0.

Pour spécifier les conditions d'équilibre dans Théorème 2.4.6, nous avons besoin de la généralisation suivante du principe de domination.

Théorème 2.5.3. *Si* $\mu \in \mathcal{M}^f$, $\nu \in \mathcal{M}$, $||\mu|| \geq ||\nu||$ *et si* $V^\mu \leq M + V^\nu$ *quasi partout dans* $S(\mu)$ *pour une constante* M *alors cette inégalité est valable partout dans* $\mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION : Voir [SaTo97, Theorem II.3.2]. $\square$

THÉORÈME 2.5.4 (RÉGULARITÉ ET CONDITIONS D'ÉQUILIBRE). *Soient $E \subset \mathbb{C}$ compact, $f \in \mathcal{C}(E)$ et $w_{f,E} = W_{f,E} - \int f \, d\mu_{f,E}$ comme dans Lemme 2.4.4. Alors*

$$\begin{array}{ll} V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x) \geq w_{f,E} & \text{pour } x \in E \setminus S(\mu_{f,E}) \text{ étant régulier par rapport à } E, \text{ et} \\ V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x) = w_{f,E} & \text{pour } x \in S(\mu_{f,E}) \text{ étant régulier par rapport à } E. \end{array}$$

DÉMONSTRATION : Pour montrer la première inégalité, rappelons que g définie par $g(x) = V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x)$ est continue dans $E \setminus S(\mu_{f,E})$. Par consequent, $g(x) < w_{f,E}$ pour un $x \in E \setminus S(\mu_{f,E})$ impliquerait qu'il existe un $r > 0$ avec $g(y) < w_{f,E}$ pour $y \in F := E \cap \{y : |y - x| \leq r\}$. On déduit de Définition 2.5.1 et Exercice 2.4.3(a) que $cap(F) > 0$, en contradiction avec Théorème 2.4.6.

Soit maintenant $x \in S(\mu_{f,E})$ régulier par rapport à E. D'après la relation (8) du Théorème 2.4.6, il suffit de montrer que $V^{\mu_{f,E}}(x) + f(x) \geq w_{f,E}$. Par absurde, supposons que $2\epsilon := w_{f,E} - V^{\mu_{f,E}}(x) - f(x) > 0$. Par hypothèse sur f il existe un $r > 0$ de sorte que, pour tout $y \in F := \{y \in E : |y - x| \leq r\}$ nous avons $f(y) \leq f(x) + \epsilon$. En utilisant la relation (7) du Théorème 2.4.6, nous déduisons que $w_{f,E} - V^{\mu_{f,E}} - f(x) \leq f - f(x) \leq \epsilon$ q.p. dans F, et que $\epsilon = \epsilon + W_{0,F} - V^{\mu_{0,F}}$ q.p. dans F. Théorème 2.5.3 permet de conclure que

$$y \in \mathbb{C} : \qquad w_{f,E} - V^{\mu_{f,E}}(y) - f(x) \leq \epsilon + W_{0,F} - V^{\mu_{0,F}}(y).$$

Par Définition 2.5.1 et hypothèse, x est aussi régulier par rapport à F. Donc $W_{0,F} = V^{\mu_{0,F}}(x)$, et l'inégalité ci-dessus pour $y = x$ donne une contradiction. $\square$

EXERCICE 2.5.5 (EQUILIBRE POUR DEUX ENSEMBLES). *Soient $F \subset E \subset \mathbb{C}$ compact, de capacité positive. Montrer que*

$$x \in \mathbb{C} : \qquad 0 \leq W_{0,E} - V^{\mu_{0,E}}(x) \leq W_{0,F} - V^{\mu_{0,F}}(x).$$

Comment ce résultat change-t-il s'il y a un champs extérieur ?

2.6 Fonctions de Green et le Lemme de Bernstein-Walsh

Les résultats en électrostatique nous permettent maintenant de borner la croissance d'un polynôme sachant que sa norme du maximum (à poids) sur un compact est borné par 1. Comme cas particulier nous obtenons dans le corollaire ci-dessus le Lemme de Bernstein-Walsh. Notons déjà ici que ces résultats ne peuvent pas être asymptotiquement améliorés. Une preuve de cette dernière propriété nécessite quelques outils supplémentaires et sera présenté dans §2.9.

THÉORÈME 2.6.1. *Soit E un compact de capacité positive, $f \in \mathcal{C}(E)$, et $w(x) := \exp(-f(x))$. Alors pour tout polynôme P de degré $\leq n$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$*

$$\frac{|P(x)|}{||w^n P||_{L_\infty(E)}} \leq \exp(n w_{f,E} - n V^{\mu_{f,E}}(x)).$$

De plus, si P est unitaire alors $||w^n P||_{L_\infty(E)} \geq \exp(-n w_{f,E})$.

DÉMONSTRATION : Sans perte de la généralité nous pouvons supposer que P soit unitaire, c'est-à-dire, son coefficient de tête soit égal à 1. Ecrivons $\log(1/|P(z)|^{1/n}) = V^\nu(z)$ étant continue dans $\mathbb{C}$ (à valeurs dans $(-\infty, +\infty]$). Notons que $\nu \in \mathcal{M}_1$, et $\mu := \mu_{f,E} \in \mathcal{M}_1^f$. Pour $z \in S(\mu)$ nous avons

$$V^\mu(z) \leq w_{f,E} - \min_{x \in S(\mu)} f(x) =: c_2 < \infty$$

par la relation (8) du Théorème 2.4.6, et

$$V^\mu(z) - V^\nu(z) \leq \max_{x \in S(\mu)} (V^\mu(x) + f(x)) - \min_{y \in E} (V^\nu(x) + f(x))$$
$$\leq w_{f,E} + \log(\max_{y \in E} |w(y)^n P(y)|^{1/n}) = w_{f,E} + \frac{1}{n} \log(||w^n P||_{L_\infty(E)}) =: c_1 < \infty$$

par (8) et construction. Le principe de domination du Théorème 2.3.9 nous permet de conclure que

$$z \in \mathbb{C} : \quad V^\mu(z) - V^\nu(z) \leq w_{f,E} + \log(\max_{y \in E} |w(y)^n P(y)|^{1/n}),$$

comme indiqué dans la première partie de l'énoncé. La deuxième découle en faisant tendre z vers ∞. □

Le cas $w = 1$ mérite une attention particulière.

DÉFINITION 2.6.2 (FONCTION DE GREEN). *Pour un ensemble compact E, soit $g_E(z) = W_{0,E} - V^{\mu_{0,E}}(z)$ si $\mathrm{cap}(E) > 0$, et $g_E(z) = +\infty$ sinon.*

Dans le contexte de l'Exercice 2.4.12 nous avons montré que $g_E \geq 0$ dans $\mathbb{C}$, avec égalité q.p. dans E. Aussi, par construction, g_E est subharmonique dans $\mathbb{C}$, et harmonique dans $\mathbb{C} \setminus E$, avec $g_E(z) - \log(|z|) \to \log(1/cap(E))$ pour $|z| \to \infty$. Dans le cas $f = 0$, nous obtenons à partir de Théorème 2.6.1 le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.6.3 (LEMME DE BERNSTEIN-WALSH). *Soit E un compact. Alors pour tout polynôme P unitaire de degré $\leq n$ et pour tout $x \in \mathbb{C}$*

$$\frac{|P(x)|}{||P||_{L_\infty(E)}} \leq \exp(n g_E(x)), \qquad ||P||_{L_\infty(E)} \geq \mathrm{cap}(E)^n.$$

Revenons à un deuxième aspect du Théorème 2.6.1. D'après la relation (8) du Théorème 2.4.6, l'ensemble fermé $S^*(f, E) := \{z \in E : V^{\mu_{f,E}}(z) + f(z) \leq w_{f,E}\}$ comporte tout élément de $S(\mu_{f,E})$, mais ne coïncide pas forcement avec E (même si dans beaucoup d'exemples nous avons égalité). D'après Théorème 2.6.1 nous savons que le maximum de $w(x)^n P(x)$ sur E ne sera pas atteint en un point de $E \setminus S^*(f, E)$, d'où le résultat

COROLLAIRE 2.6.4. *Soit $S^*(f, E) := \{z \in E : V^{\mu_{f,E}}(z) + f(z) \leq w_{f,E}\}$, alors pour tout polynôme P de degré au plus n nous avons*

$$||w^n P||_{L_\infty(E)} = ||w^n P||_{L_\infty(S^*(f,E))},$$

c'est-à-dire, la norme à poids w^n "vit" dans $S^*(f, E)$.

Un exemple intéressant est celui d'une fonction poids exponentielle, étudié ci-dessous. Il peut être considéré comme point de départ de la recherche sur les problèmes de minimisation d'énergie avec champs extérieur de ces dernières 20 années.

EXEMPLE 2.6.5 (POIDS DU TYPE HERMITE/FREUD). *Pour $\lambda > 0$, soient $w(x) = \exp(-\gamma_\lambda |x|^\lambda)$ (i.e., $f(x) = \gamma_\lambda |x|^\lambda$) avec*

$$\gamma(\lambda) = \int_0^1 \frac{u^{\lambda-1}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \frac{\Gamma(\lambda/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma((\lambda+1)/2)}$$

($\gamma_2 = 1$), et soit μ avec $S(\mu) = [-1,1]$ donné par la fonction poids

$$\frac{d\mu}{dt}(t) = s(t,\lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{|t|}^1 \frac{u^{\lambda-1}}{\sqrt{u^2-t^2}}\, du.$$

On montre (comparer avec [SaTo97, Theorem IV.5.1]) que

$$V^\mu(x) + f(x) \begin{cases} = w := \log(2) + 1/\lambda & \textit{for } x \in [-1,1] \\ > w = \log(2) + 1/\lambda & \textit{for } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$$

En utilisant la deuxième partie du Théorème 2.4.6, nous pouvons conclure que, pour tout E compact avec $[-1,1] \subset E \subset \mathbb{R}$ nous avons

$$\mu = \mu_{f,E}, \quad w = w_{f,E}, \quad S^*(f,E) = [-1,1],$$

et en particulier pour un polynôme P de degré $\leq n$

$$||w^n P||_{L^\infty(E)} = ||w^n P||_{L^\infty(\mathbb{R})} = ||w^n P||_{L^\infty([-1,1])}.$$

En utilisant la transformation $y = x \cdot (n\gamma_\lambda)^{1/\lambda}$, il en découle que

$$||e^{-|y|^\lambda} P(y)||_{L^\infty(\mathbb{R})} = ||e^{-|y|^\lambda} P(y)||_{L^\infty([-(n\gamma_\lambda)^{1/\lambda},(n\gamma_\lambda)^{1/\lambda}])}.$$

2.7 Energie discrète et les points de Fekete

Pour l'instant nous nous sommes occupés seulement de l'équilibre d'une charge continue donnée par une mesure. Néanmoins, une étude similaire peut être menée pour determiner la position d'equilibre d'un nombre de $n+1$ particules ayant la même charge élémentaire sous présence d'un champs extérieur. Nous verrons dans la suite des applications de ce problème à l'interpolation polynômiale (nombre de Lebesgue pondéré).

Supposons que la particule j de charge $1/(n+1)$ se trouve à l'endroit $x_j \in E$, $j = 0, ..., n$, alors l'énergie du système à n particules avec force externe $2\frac{n}{n+1}f$ (le facteur $\frac{n}{n+1}$ étant ajouté pour faciliter ultérieurement l'analyse) s'écrit comme

$$\begin{aligned} I_f(x_0,...,x_n) &:= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j,k=0,j\neq k}^n \log(\frac{1}{|x_j - x_k|}) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n 2\frac{n}{n+1} f(x_j) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j,k=0,j\neq k}^n [\log(\frac{1}{|x_j - x_k|}) + f(x_j) + f(x_k)]. \end{aligned}$$

L'équilibre sera alors atteint en minimisant cette expression par rapport à $x_0, ..., x_n \in E$.

Définition 2.7.1 (Points de Fekete). *Pour un ensemble compact E de capacité positive, $f \in \mathcal{C}(E)$, $n \geq 1$, soit*

$$\delta_n(f,E) = \max_{x_0,...,x_n \in E} \delta_n(f,\{x_0,...,x_n\}), \quad \delta_n(f,\{x_0,...,x_n\}) := \exp(-\frac{n+1}{n} I_f(x_0,...,x_n)).$$

Un ensemble $\mathcal{F}_n = \{x_{0,n},...,x_{n,n}\}$ réalisant le maximum dans $\delta_n(f,E)$ est dit ensemble de nièmes points de Fekete pondérés.

Bien entendu, en général il n'y a pas unicité pour les points de Fekete. Aussi, $\mathcal{F}_n \subset S^*(f,E)$ d'après Corollaire 2.6.4. Dans certains cas rares on peut expliciter des tels points, voir par exemple le résultat suivant de Stieltjes :

Exemple 2.7.2 (Poids de Jacobi). *Avec $\alpha, \beta > 0$, considérons $E = [-1,1]$, et $f(x) = -\alpha \log(1-x) - \beta \log(1+x)$ (par conséquent, $e^{-f(x)} = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ est un poids de Jacobi). Sans perte de la généralité on peut supposer les points de Fekete sous la forme $-1 < x_0 < x_1 < ... < x_n < 1$. Ecrivons $Q(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$. Comme le maximum est atteint en un point critique, nous avons pour $k = 0,...,n$*

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} I_n(x_1,...,x_n) = nf'(x_k) - \sum_{j=0, j\neq k} \frac{1}{x_j - x_k} = [-\frac{\alpha n}{x-1} - \frac{\beta n}{x+1} - \frac{Q''(x)}{Q'(x)}]_{x=x_k}$$

la fonction en crochets étant de la forme $r(x) = P(x)/((x^2-1)Q'(x)$, $xr(x) \to (-1-\alpha-\beta)n$ pour $x \to \infty$, et ayant des zéros en $x_0,...,x_n$. Par conséquent, Q est une solution polynômiale de l'équation différentielle

$$\frac{\alpha n}{x-1} + \frac{\beta n}{x+1} + \frac{Q''(x)}{Q'(x)} = (1+\alpha+\beta)n(n+1)\frac{Q(x)}{Q'(x)(x^2-1)}$$

ou

$$-(1-x^2)Q''(x) + (\alpha n(x+1) + \beta n(x-1))Q'(x) = (1+\alpha+\beta)n(n+1)Q(x).$$

Par conséquent, Q coincide avec le polynôme de Jacobi de degré $n+1$ associé aux paramètres $(2\alpha n - 1, 2\beta n - 1)$. En particulier, pour $\alpha = \beta = 1/n$, nous trouvons que les $(n+3)$ièmes points de Fekete pour $(f,E) = (0,[-1,1])$ sont donnés par ± 1 plus les zéros du polynôme de Jacobi de degré $n+1$ associé aux paramètres $(1,1)$. Ces derniers se comportent essentiellement comme les points extremaux du polynôme de Chebyshev.

Exercice 2.7.3 (Monotonie). *Montrer que la suite $(\delta_n(f,E))_n$ est décroissante. Idée: on montra d'abord que (comparer avec [SaTo97, Theorem III.1.1])*

$$k = 0,...,n: \quad \delta_n(f,E)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq \delta_{n-1}(f,E)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (e^{-f(x_j)-f(x_k)}|x_j - x_k|).$$

Il reste à vérifier que, pour $n \to \infty$, nous retrouvons bien nos résultats du cas continu.

Théorème 2.7.4. *Nous avons $\delta_n(f,E) \to \exp(-W_{f,E})$, et la suite (μ_n) des mesures de comptage $\mu_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \delta_{x_{j,n}}$ des points de Fekete converge vers la mesure d'équilibre $\mu_{f,E}$.*

Démonstration : Comme première étape montrons un résultat de semi-continuité qui sera utilisé aussi ultérieurement: soient $x_{0,n}, ..., x_{n,n} \in E$ arbitraires, μ_n les mesures de comptage correspondants, avec $\mu_n \to \mu$, alors

$$\liminf_{n\to\infty} I_f(x_{0,n}, ..., x_{n,n}) \geq I_f(\mu). \tag{9}$$

Effectivement, pour tout $\eta > 0$ nous avons $\log(\frac{1}{|x-y|}) \geq k^\eta(x-y)$, et alors

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} I_f(x_{0,n}, ..., x_{n,n}) \\
\geq\ & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=0}^{n} [\eta + 2f(x_{j,n})] + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j,k=0, j\neq k}^{n} [k^\eta(x_j - x_k) + f(x_j) + f(x_k)] \\
=\ & \liminf_{n\to\infty} \iint [k^\eta(x-y) + f(x) + f(y)]\, d\mu_n(x) d\mu_n(y) \\
=\ & \iint [k^\eta(x-y) + f(x) + f(y)]\, d\mu(x) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Un passage $\eta \to \infty$ donne le résultat (9).

L'étape suivante consiste à montrer que $(\delta_n(f,E))_n$ est bornée inférieurement. Par construction, nous avons pour tout $x_0, ..., x_n \in E$

$$n(n+1)\log(\frac{1}{\delta_n(f,E)}) \leq \sum_{j,k=0, j\neq k}^{n} [\log(\frac{1}{|x_j - x_k|}) + f(x_j) + f(x_k)].$$

Pour une mesure $\nu \in \mathcal{M}_1^f(E)$, intégrons cette égalité par rapport à $d\nu(x_0)...d\nu(x_n)$

$$n(n+1)\log(\frac{1}{\delta_n(f,E)}) \leq \sum_{j,k=0, j\neq k}^{n} \iint [\log(\frac{1}{|x_j - x_k|}) + f(x_j) + f(x_k)] d\nu(x_j) d\nu(x_k) = I_f(\nu).$$

En particulier, pour le choix $\nu = \mu_{f,E}$ nous obtenons $\delta_n(f,E) \geq \exp(-I_f(\mu_{f,E})) = \exp(-W_{f,E})$. En résumant ces deux résultats, nous avons pour tout point d'accumulation μ de la suite $(\mu_n)_n$, i.e., limite d'une sous-suite $(\mu_n)_{n\in\Lambda}$

$$\exp(-W_{f,E}) \leq \liminf_{n\to\infty} \delta_n(f,E) \leq \limsup_{n\to\infty, n\in\Lambda} \delta_n(f,E) \leq \exp(-I_f(\mu)) \leq \exp(-I_f(\mu_{f,E})),$$

d'où $I_f(\mu) = I_f(\mu_{f,E})$. L'unicité de la mesure extremale donne $\mu = \mu_{f,E}$, c'est-à-dire, (μ_n) converge vers $\mu_{f,E}$. □

Exemple 2.7.5 (Poids de Jacobi). *Revenons à l'Exemple 2.7.2 avec $E = [-1,1]$, et $f(x) = -\alpha\log(1-x) - \beta\log(1+x)$ (plus précisément, pour obtenir $f \in \mathcal{C}(E)$ il faudra choisir $E = [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit). La mesure d'équilibre et son support $S(\mu_{f,E}) = [a,b]$ sont donnés dans [SaTo97, Exemple IV.1.7 et Exemple IV.5.2]*

$$\begin{aligned}
a &= \beta^2 - \alpha^2 - \sqrt{(1-(\beta+\alpha)^2)(1-(\beta-\alpha)^2)} \\
b &= \beta^2 - \alpha^2 - \sqrt{(1-(\beta+\alpha)^2)(1-(\beta-\alpha)^2)} \\
\frac{d\mu_{f,E}}{dx}(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{1+\alpha+\beta}{1-x^2}\sqrt{(x-a)(b-x)}.
\end{aligned}$$

A la fin de cette partie, considérons l'interpolation polynomiale. Soit $E_n := \{y_0, y_1, ..., y_n\} \subset E$. Pour un $g = (g_0, ..., g_n)^T \in \mathbb{C}^{n+1}$, notons par p_n^g le polynôme d'interpolation aux abscisses $y_0, ..., y_n$, c'est-à-dire, le polynôme de degré au plus n vérifiant $p_n^g(y_k) = g_k$ pour $k = 0, ..., n$. Discutons le problème suivant: sachant que les valeurs sont entachées d'erreurs Δg_j, quel erreur relative obtient-on pour la norme $L_\infty(E)$ à poids e^{-nf} ? Au pire des cas, on est amené à étudier l'expression

$$\max_{g,\Delta g} \frac{||e^{-nf}(p_n^{g+\Delta g} - p_n^g)||_{L_\infty(E)}}{||e^{-nf}p_n^g||_{L_\infty(E)}} \cdot \Big(\frac{||\Delta g||_\infty}{||g||_\infty}\Big)^{-1} = \max_{\Delta g} \frac{||e^{-nf}p_n^{\Delta g}||_{L_\infty(E)}}{||e^{-nf}p_n^{\Delta g}||_{L_\infty(E_n)}} \max_g \frac{||e^{-nf}p_n^g||_{L_\infty(E_n)}}{||e^{-nf}p_n^g||_{L_\infty(E)}}.$$

Comme $E_n \subset E$, la deuxième expression est clairement majorable par 1 (on se ramène au rapport des erreurs absolues). De plus, $\{p_n^{\Delta g} : \Delta g \in \mathbb{C}^{n+1}\} = \mathcal{P}_n$, l'ensemble des polynômes de degré au plus n. On est alors amené à discuter la quantité (dite nombre de Lebesgue)

$$1 \le \max_{P\in\mathcal{P}_n} \frac{||e^{-nf}P||_{L_\infty(E)}}{||e^{-nf}P||_{L_\infty(E_n)}}.$$

Nous avons la représentation suivante du nombre de Lebesgue

Lemme 2.7.6. *Si $E_n := \{y_0, y_1, ..., y_n\} \subset E$ alors*

$$\max_{P\in\mathcal{P}_n} \frac{||e^{-nf}P||_{L_\infty(E)}}{||e^{-nf}P||_{L_\infty(E_n)}} = \max_{x\in E} \sum_{j=0}^n \frac{e^{-nf(x)}}{e^{-nf(y_j)}} \prod_{k=0,k\neq j}^n \Big|\frac{x - y_k}{y_j - y_k}\Big|.$$

Démonstration : L'estimation $\le$ découle du fait que, pour tout $P \in \mathcal{P}_n$,

$$\begin{aligned} |e^{-nf(x)}P(x)| &= \Big|\sum_{j=0}^n e^{-nf(x)}P(y_j) \prod_{k=0,k\neq j}^n \frac{x - y_k}{y_j - y_k}\Big| \\ &\le ||e^{-nf}P||_{L_\infty(E_n)} \sum_{j=0}^n \Big|e^{-nf(x)+nf(y_j)} \prod_{k=0,k\neq j}^n \frac{x - y_k}{y_j - y_k}\Big|. \end{aligned}$$

Pour montre l'égalité pour un polynôme $\tilde{P}$ et un argument $\tilde{x} \in E$ particulier, considérons $\tilde{x} \in E$ ou le maximum de la somme sur E est atteint, et le polynôme avec valeurs

$$\tilde{P}(y_j) = e^{i\phi_j + nf(y_j)}, \qquad \text{avec } \phi_j \in \mathbb{R} \text{ de sorte que} \qquad e^{i\phi_j} \prod_{k=0,k\neq j}^n \frac{\tilde{x} - y_k}{y_j - y_k} \ge 0.$$

$\square$

Suivant les arguments développés ci-dessus, il serait interessant de trouver des arguments $y_0, ..., y_n \in E$ minimisant le nombre de Lebesgue à poids. Notons que, pour E_n l'ensemble des points de Fekete, nous avons par construction pour $j = 0, 1, ..., n$

$$\max_{x\in E} \frac{e^{-nf(x)}}{e^{-nf(y_j)}} \prod_{k=0,k\neq j}^n \Big|\frac{x - y_k}{y_j - y_k}\Big| = \max_{x\in E} \Big(\frac{\delta_n(f, \{y_0, ..., y_{k-1}, x, y_{k+1}, ..., y_n\})}{\delta_n(f, \{y_0, ..., y_n\})}\Big)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 1,$$

le nombre de Lebesgue correspondant étant alors borné par $n+1$ d'après Lemme 2.7.6. Il faudra savoir que, même dans le cas simple $(f, E) = (0, [-1, 1])$, une configuration minimisant le nombre de Lebesgue (qui est au moins égal à une constante fois $\log(n)$) n'est pas connue. Ici on peut montrer que les nombres de Chebyshev, $y_j = \cos(\pi j/n)$, $j = 0, 1, ..., n$, donnent un nombre de Lebesgue du même ordre de grandeur (une autre constante fois $\log(n)$) que la valeur optimale.

2.8 Polynômes extremaux et normes Hölderiennes

Le premier objectif de ce chapitre est de montrer que les estimations données dans Théorème 2.6.1 et le Lemme 2.6.3 ne peuvent asymptotiquement pas être améliorés. Ensuite nous généralisons nos résultats au cas d'une norme $L_p(E)$ à poids. Débutons par le résultat suivant:

COROLLAIRE 2.8.1. *Soit E un ensemble compact de capacité positive, et $f = \log(1/w) \in \mathcal{C}(E)$. Il existe une suite de polynômes P_n unitaires avec racines dans E de sorte que*

$$\lim_{n\to\infty} \big(||w^n P_n||_{L_\infty(E)}\big)^{1/n} = \exp(-w_{f,E}).$$

DÉMONSTRATION : Considérons les polynômes unitaires de degré n

$$P_{j,n}(x) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} (x - x_{k,n}),$$

$x_{0,n}, ..., x_{n,n}$ étant les points de Fekete associés à (f, E), alors par construction des points de Fekete

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{0\le j\le n} \big(||w^n P_{j,n}||_{L_\infty(E)}\big)^{1/n} \le \liminf_{n\to\infty} \big(\prod_{j=0}^{n} ||w^n P_{j,n}||_{L_\infty(E)}\big)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \big(\prod_{j=0}^{n} e^{-nf(x_{j,n})}|P_{j,n}(x_{j,n})|\big)^{\frac{1}{n(n+1)}} = \liminf_{n\to\infty} \delta_n(f, E) \cdot \exp(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_{k,n})),$$

la dernière quantité coïncidant avec $\exp(-W_{f,E}+\int f\, d\mu_{f,E}) = \exp(-w_{f,E})$ d'après Théorème 2.7.4. En choisissant $P_n = P_{j_n,n}$, $j_n \in \{0, 1, ..., n\}$ réalisant le minimum ci-dessus, le Théorème 2.6.1 nous donne $\limsup\big(||w^n P_n||_{L_\infty(E)}\big)^{1/n} \ge \exp(-w_{f,E})$, d'où le résultat. □

Une conséquence de ce corollaire est que la deuxième partie du Théorème 2.6.1 est asymptotiquement précise. La même propriété est vraie pour la première partie, une preuve étant basée sur Corollaire 2.8.1 ensemble avec le résultat suivant.

THÉORÈME 2.8.2. *Soit E un compact de capacité positive, Ω la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus E$, $f \in \mathcal{C}(E)$, $w(x) := \exp(-f(x))$, et $(P_n)_n$ une suite de polynômes unitaires, P_n de degré n ayant ses zéros dans E. Alors nous avons l'équivalence*

$$(i) \qquad \lim_{n\to\infty} \big(||w^n P_n||_{L_\infty(E)}\big)^{1/n} = \exp(-w_{f,E})$$

$$(ii) \qquad \text{pour un } z \in \Omega\text{:} \quad \lim_{n\to\infty} \big(\frac{|P_n(z)|}{||w^n P_n||_{L_\infty(E)}}\big)^{1/n} = \exp(w_{f,E} - V^{\mu_{f,E}}(z)).$$

De plus, si une de ces conditions est vraie alors la convergence dans (ii) est valable uniformément dans tout sous-ensemble compact K de Ω.

DÉMONSTRATION : Comme dans la preuve du Théorème 2.6.1, considérons

$$\phi_n(z) = V^{\mu_{f,E}}(z) + \log(|P_n(z)|^{1/n}) - w_{f,E} - \frac{1}{n}\log(||w^n P_n||_{L_\infty(E)}).$$

D'après hypothèse, nous pouvons écrire $-\log(|P_n(z)|^{1/n}) = V^{\mu_n}(z)$ avec $\mu_{f,E}, \mu_n \in \mathcal{M}_1(E)$. Par conséquent, ϕ_n est harmonique dans $\Omega \cup \{\infty\}$, et le Théorème 2.6.1 nous dit que $\phi_n(\infty) = -w_{f,E} - \frac{1}{n}\log(||w^n P_n||_{L_\infty(E)}) \leq 0$ et $\phi_n(z) \leq 0$ pour $z \in \mathbb{C}$. Pour un ensemble d'entiers Λ', on trouve $\Lambda \subset \Lambda'$ de sorte que $(\mu_n)_{n\in\Lambda}$ admet une limite $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$. En passant éventuellement à une sous-suite nous pouvons conclure que $\phi_n \to \phi$ uniformément sur tout sous-ensemble fermé de $\Omega \cup \{\infty\}$, et alors ϕ est soit la constante $-\infty$ soit harmonique.

Si maintenant une des conditions (i) ou (ii) est valable, alors ϕ est harmonique et ≤ 0 dans $\Omega \cup \{\infty\}$. Dans les deux cas (i) ou (ii), le principe du maximum permet de conclure que $\phi(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega \cup \{\infty\}$, ce qui termine la démonstration. □

Une suite de polynômes vérifiant une des deux conditions (i) ou (ii) est dite extremale. Il n'est pas vrai que la suite des mesures de comptage d'une telle suite converge toujours vers $\mu_{f,E}$. Néanmoins, si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est de mesure de Lebesgue 0 (mesure de Lebesgue du $\mathbb{R}^2$) alors en se basant sur le Théorème d'unicité [SaTo97, Theorem II.2.1] on peut établir une telle convergence (et donc par exemple pour E intervalle).

2.9 Points de Leja

3 Applications à l'approximation

3.1 Le phénomène de Runge

3.2 Interpolation rationnelle avec pôles prescrits

3.3 La norme L_p

3.4 Approximation rationnelle des fonctions de Markov

3.5 Condensateurs et meilleure approximation rationnelle

4 Autres Applications en Algèbre linéaire

4.1 L'équation de Sylvester et la méthode ADI

4.2 Conditionnement des matrices structurées

4.3 Matrices de Cauchy à abscisses réelles

4.4 Matrices de Hankel/Vandermonde/Krylov

Bibliographie

[NiSo88] E.M. Nikishin & V.N. Sorokin, Rational Approximations and Orthogonality, *Translations of Mathematical Monographs* **92**, Am. Math. Soc., Providence, R.I. (1991). [BIBMATH]

[Rud70] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw–Hill (1970). [BIBMATH, BU]

[SaTo97] E.B. Saff and V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Springer, Berlin, 1997. [BIBMATH]

[Tsu59] M. Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, Dover, New York (1959). [BIBMATH]

[Wal35] J.L. Walsh, Approximation by polynomials in the complex domain, Gauthier–Villars (1935). [BIBMATH]