§3.3. Méthodes itératives de type Newton

Pour résoudre $g(x)=0$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la méthode de Newton trouve x_{k+1} en annulant la tangente de f en x_k :

$$g(x_k) + g'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \iff x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}.$$

Imaginons que $f(a)$ est une solution de l'équation $g(x)=0$ (g dépendant de a). Comment généraliser la méthode de Newton au cas des arguments matricielles, autrement dit, comment linéariser $g: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ (ou, plus généralement, $g: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ Banach) ?

3.3.1. Déf Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un Banach (ici $\mathcal{B} = \mathbb{C}^{n\times n}$). On dit que $g: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est différentiable au sens de Fréchet s'il existe un opérateur $E \to D_g(X, E)$ linéaire de sorte que $\| g(X+E) - g(X) - D_g(X,E) \| = o(\|E\|)_{\|E\|\to 0}$ $\square$

Donc, au premier ordre, $\limsup\limits_{\substack{E\in\mathcal{B}\\ \|E\|\to 0}} \frac{\|D_g(X,E)\|}{\|E\|}$

$= \sup\limits_{\|E\|=1} \|D_g(X,E)\|$ nous donne la "pire" magnification des erreurs absolues si on perturbe l'argument dans $g(A)$.

3.3.2. Exemples (à partir de moment pas matrices)

ⓐ $g(X) = A_1 X + A_2$

$\Rightarrow g(X+E) - g(X) = A_1 E = L_g(X, E)$

ⓑ $g(X) = A_1 X^2$

$\Rightarrow g(X+E) - g(X) = \underbrace{A_1 \cdot (XE + EX)}_{= L_g(X,E)} + A_1 E^2$

ⓒ $g(X) = X^{-1}$

$\Rightarrow g(X+E) - g(X) = X^{-1}(I + EX^{-1})^{-1} - X^{-1}$

$= \underbrace{-X^{-1} E X^{-1}}_{= L_g(X,E)} + X^{-1} E X^{-1} E X^{-1} (I + EX^{-1})^{-1}$

Attention à la non commutativité, sauf si

3.3.3. Lemme : Soit g analytique dans voisinage Ω de $\sigma(A)$. Si $EX = XE$ alors

$L_g(X, E) = g'(X) \cdot E = E \cdot g'(X)$.

Preuve : E permute aussi avec $(X - \zeta I)^{-1}$ pour $\zeta \in \partial\Omega$, et alors (en réduisant la taille de Ω)

$g(X+E) - g(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} g(\zeta) \cdot \underbrace{\left[(\zeta I - \cancel{A} - E)^{-1} - (\zeta I - \cancel{A})^{-1} \right]}_{= (\zeta I - \cancel{A})^{-2} E + O(\|E\|^2)} d\zeta$

$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} g(\zeta) (\zeta I - \cancel{A})^{-2} d\zeta}_{= g'(\cancel{A})} \cdot E + O(\|E\|^2)$ ▪

$A \to M$

Si on applique Newton à $g(X) = X^{-1} - A$ ($g(X) = 0$ ayant seule solution $f(A) = A^{-1}$), on obtient

$g(X_k) + L_g(X_k, X_{k+1} - X_k) = 0 = X_k^{-1} - A$

$X_k^{-1}(X_{k+1} - X_k) X_k^{-1} \Leftrightarrow X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$

itération dite de Newton-Schulz.

Elle peut être intéressante s'il n'est pas coûteux de multiplier des matrices (creuses, structure de Toeplitz type, etc) mais coûteux d'inverser (calcul parallèle).

Notons que

$$I - MX_{k+1} = I - 2MX_k + (MX_k)^2 = (I - MX_k)^2$$

$$\text{(rapide?!)} \quad = \dots = (I - MX_0)^{2^{k+1}}$$

$\Rightarrow$ convergence si $\rho(I - MX_0) < 1$.

Aussi, avec X_0 tous les itérés commutent avec M.

Une approche similaire est adaptée pour calculer $f(A) \in \{A^{-1/2}, A^{1/2}, \operatorname{sign}(A), A^{\frac{1}{p}}\}$

3.3.4. Exemple : $f(A) = A^{+1/2}$

Considérons pour $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$g(X) = AX^2 - A$, alors $D_g(X, E) = AXE + AEX$.

Il est généralement difficile de résoudre

$$D_g(X_k, X_{k+1} - X_k) = -g(X_k) \text{ pour } X_{k+1}$$

(équation de Sylvester), mais si on suppose que X_{k+1} commute avec X_k (et A) on trouve

$$X_{k+1} = X_k - \frac{1}{2} X_k^{-1} (X_k^2 - A^{-1})$$

$$= \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1} A) = \frac{1}{2}(X_k + AX_k^{-1})$$

Réciproquement, si X_0 commute avec A et si on calcule X_{k+1} par une des formules ci-dessus alors X_{k+1} commute avec A et $X_0, \dots, X_k$.

Choix de X_0 permutant avec A ? $X_0 \in \{I, A\}$ (donnant le même X_1!)

Estimation d'erreur ?

$S_k := A^{-1/2} \cdot X_k$ permute aussi avec A
et $\sigma(S_0) \subset \{Re(w)>0\}$ pour $X_0 \in \{I, A\}$.

Nous obtenons la récurrence (S_{k+1} inversible car $\sigma(S_{k+1}) \subset \{Re(w)>0\}$)

$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$ ou alors

$$\left.\begin{aligned} S_{k+1}+I &= \tfrac{1}{2} S_k^{-1} (S_k + I)^2 \\ S_{k+1}-I &= \tfrac{1}{2} S_k^{-1} (S_k - I)^2 \end{aligned}\right\}$$

donc $(S_k - I)(S_k + I)^{-1} = \Big[\underbrace{(S_0 - I)(S_0+I)^{-1}}_{\rho(\cdots)<1}\Big]^{2^k} \to 0.$

conclusion $X_k \to A^{1/2}$ assez rapidement !

3.3.5. Exemple : $f(A) = A^{-1/2} = (A^{-1})^{1/2}$

Appliquer 3.3.4. à A^{-1} Donc des itérés $Y_k = A^{-1} \cdot X_k$
$Y_{k+1} = \frac{1}{2}(Y_k + A^{-1} Y_k^{-1})$

3.3.6 Exemple : $f(A) = \text{sign}(A)$

Pour $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$
on trouve $\text{sign}(A) = A \cdot (A^2)^{-1/2}$
donc itérés
$S_k = A \cdot k^{\text{ième}}$ itéré $\tilde{Y}_k$ pour A^2

$S_{k+1} = A \cdot \tilde{Y}_{k+1} = \frac{1}{2}(A\tilde{Y}_k + A \cdot A^{-2} \cdot \tilde{Y}_k^{-1})$

$\frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$ même suite que dans 3.3.4 !

relation DB
$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + Y_k^{-1})$
$Y_{k+1} = \frac{1}{2}(Y_k + X_k^{-1})$
peut être plus stable

Car $\tilde{Y}_k$ commute avec A^{-2} et donc aussi avec A.
estimation d'erreur ? $S = \text{sign}(A) \Rightarrow S^2 = I$, et S permute avec S_k
$\Rightarrow (S_{k+1} \pm S) = \frac{1}{2} S_k^{-1} (S_k \pm S)^2 \Rightarrow (S_k - S)(S_k + S)^{-1} =$
$[(S_0 - S)(S_0+S)^{-1}]^{2^k}$ rayon spectral < 1 !

Lien avec meilleure
approximation rationnelle
X_n = fonction rationnelle de A!
Voir livre de Braess!