§3.2. Estimations d'erreur pour l'approx d'Arnoldi

Pour les matrices normales on peut donner une estimation d'erreur basée sur l'erreur d'interpolation. et alors $W(A) = \mathrm{conv}(\sigma(A))$

3.2.1. Théorème : Soit $f \in C^{(k)}(W(A))$.

Avec $\gamma_m > 0$ le coefficient de tête de $\tilde{p}_m$

$\left(= \frac{1}{h_{1,0} \cdot h_{2,1} \cdots h_{m+1,m}}\right.$ dans le cas polynomial $\left. q_{m-1} = 1 \right)$

nous avons pour l'erreur $\mathcal{E}_m = f(A)b - V_m f(A_m) V_m^* b$

(a) $$\| \mathcal{E}_m \| \leq \left\| \frac{(q_{m-1} f)^{(m)}}{m!} \right\|_{W(A)} \cdot \frac{1}{\gamma_m}$$

(b) Si $A = A^*$: $\exists \xi \in W(A)$: $$\| \mathcal{E}_m \| = \frac{|(q_{m-1} f)^{(m)}(\xi)|}{m!} \frac{1}{\gamma_m}$$

(c) De plus, si $q_{m-1} = 1$ alors $\frac{1}{\gamma_m} \leq 2 \cdot \mathrm{cap}(W(A))^m$,

avec $$\mathrm{cap}(\mathbb{E}) = \frac{1}{\phi'(\infty)} = \psi'(\infty) = \begin{cases} \frac{\beta - \alpha}{4} & \text{si } \mathbb{E} = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ R & \text{si } \mathbb{E} = z_0 + R \cdot \mathbb{D}. \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : soit $U^* A U = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et r_m comme dans 3.1.6., $\tilde{r}_m$ comme dans 3.1.7., alors d'après 1.5.4 :

$$f(z) - r_m(z) = \frac{1}{\gamma_m} \tilde{r}_m(z) \cdot [\theta_1, \ldots, \theta_m, z] \underbrace{(q_{m-1} f)}_{=: g \in C^m(W(A))}$$

et donc $$\mathcal{E}_m = f(A)b - r_m(A) b = [\theta_1, \ldots, \theta_m, A](q_{m-1} f) \cdot \frac{1}{\gamma_m} \cdot \tilde{v}_{m+1} =$$

$$U \cdot \mathrm{diag}\left([\theta_1, \ldots, \theta_m, \lambda_j](q_{m-1} f)\right)_{j=1,\ldots,n} \cdot \underbrace{U^* \cdot \tilde{v}_{m+1}}_{= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}, \text{ de norme } 1$$

Aussi $\theta_1, \ldots, \theta_m, \lambda_j \in W(A)$ convexe

$\Rightarrow$ avec $g = q_{m-1} f \in C^m(W(A))$: $|[\theta_1, \ldots, \theta_m, \lambda_j] g| \leq \left\| \frac{g^{(m)}}{m!} \right\|_{W(A)}$

$\Rightarrow$ (a)

ⓑ est une conséquence de ⓐ si $g^{(m)}$ s'annule sinon théorème des valeurs intermédiaires !

Finalement, si q_{m-1},

$$\frac{1}{\gamma_n^2} = \frac{\langle \hat{p}_m, \hat{p}_m \rangle}{\mathrm{coeff}(\hat{p}_m, z^m)^2} \leq \frac{\langle p_m, p \rangle_0}{\mathrm{coeff}(p, z^m)^2} \quad \forall p$$

$$\leq \frac{\| f_m(A) \|^2}{\mathrm{coeff}(F_m, z^m)^2} \leq \frac{4}{\Phi'(\infty)^{2m}} \qquad \blacksquare$$

On a déjà montré que $W(A_m) \subset W(A)$, le dernier étant K-spectral pour A avec $K \leq 11.25$ d'après 1.4.7, et $K = 1$ si A normale.

3.2.2. Corollaire :

Si f est analytique dans un voisinage de $W(A)$ $\mathbb{E}$

alors $\| \varepsilon_m \| \leq 2 \cdot K \inf_{p \in \mathcal{P}_{m-1}} \| f - \frac{p}{q_{m-1}} \|_{W(A)}$

Preuve : d'après 3.1.5 $\forall p \in \mathcal{P}_{m-1}$:

$$\varepsilon_m = (f - \frac{p}{q_{m-1}})(A) b - V_m (f - \frac{p}{q_{m-1}})(A_m) V_m^* b$$

et l'inégalité triangulaire et $\|b\| = 1$ donne la propriété.

3.2.3. Corollaire :

Si f est analytique dans voisinage de $\mathbb{E} \supset W(A)$, $\mathbb{E}$ convexe, et $f = \mathcal{F}(F)$, $F(w) = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j w^j$

alors $\| \varepsilon_m \| \leq 4 \cdot \min_{p \in \mathcal{P}_{m-1}} \| F - \frac{p}{Q} \|_{\mathbb{D}}$, $Q(w) = \prod_{j=1}^{m-1} (1 - \frac{w}{\varphi(z_j)})$

Notons que 3.2.2 et 3.2.3. sont des approximations a priori, par contre 3.2.1. est a posteriori (l'estimation de γ_m calculable n'est pas toujours très fin). Pour l'exponentielle

$CK \Rightarrow A=A^*$

$f(z)=e^{\tau z}$, $W(A)=[-4\rho,0]$ et $q_{m-1}=1$, nous obtenons par exemple de 3.2.1.

que $\|E_m\| \le \frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\gamma_m} \le 2\frac{\rho^m}{m!}$, légèrement plus fin que 3.2.2. combinée avec 1.6.6.

Cette borne devient non-triviale pour $\frac{\rho e}{m}<1$, d'autres bornes plus fines ont été obtenues par [Hochbruck, Lubich] et [BB, Reichel].

(un pôle → sujet d'ex), voir aussi [Saad], [Sim+Fro].

Notons que, pour $W(A)$ intervalle, on peut aussi estimer d'une manière explicite γ_m (voir travaux de Bernstein) pour $q_{m-1}\neq 1$.

De plus, on a l'estimation plus fine

$$\frac{1}{\gamma_m} \le \frac{\left\|\frac{p}{q_{m-1}}\right\|_{\sigma(A)}}{\mathrm{coeff}(p,z^m)} \quad \text{pour tout } p\in\mathcal{P}_{m-1}$$