§ 1.3. EDO raides

Pour resoudre numériquement un système d'EDO $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ sur $[0,T]$, on discretise en N sous-intervalles $h = T/J$, $t_j = j \cdot h$, $n = 0, \ldots, J$, et on approche $y(t_j)$ par y_j obtenu, par exemple, par une méthode de Runge-Kutta explicit d'ordre s, ici $s \in \{1,2\}$: à l'étape j on defini pour un $c \in]0,1[$

$$k_1 = f(t_j, y_j), \quad k_2 = f(t_j + ch, y_j + c \cdot h \cdot k_1)$$

<u>$s=1$</u> Euler $\quad y_{j+1} = y_j + h \cdot k_1$

<u>$s=2$</u> $\quad y_{j+1} = y_j + h \cdot \left[(1 - \frac{1}{2c}) k_1 + \frac{1}{2c} k_2 \right]$ (Euler amelioré $c = 1/2$)

1.3.1. A-stabilité (conditionnelle)

Pour le problème modèle $\dot{y} = Ay$, $y(0) = y_0$, $\sigma(A) \subset \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$

on a $y(t) = \exp(At) \longrightarrow 0$ pour $t \to \infty$ (preuve exo)

on souhaite que pour $h > 0$ (suff. petit) $y_j \xrightarrow{j \to \infty} 0$.

Dans notre cas $\quad y_{j+1} = P_s(hA) y_j$, $y_j = P_s(hA)^j y_0$

avec $P_1(z) = 1 + z$, $P_2(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$ (sommes partielles de e^z)

et $\| B^j \| \to 0$ ssi $\rho(B) = \max\{ |\lambda_j| : \lambda_j \text{ v.p. de } B \} < 1$

donc il faut que h soit suff. petit (surtout si $|\lambda_1|$ grand).

1.3.2. Convergence pour problème modèle

L'étude de convergence $\quad \max_{0 \le j \le J} |y(t_j) - y_j| = O(h^s)_{h \to 0}$

est simple pour notre problème modèle (plus compliqué pour f quelc.)

Soit $h > 0$ suff. petit de sorte que $\rho(P_s(hA)) \le 1$.

$\Rightarrow \exists C$ dep. de A mais pas de h : $\max_{0 \le j \le J} \max\{\|\exp(At_j)\|, \|P_s(A)\| < C$

Aussi, $y(t_j) = \exp(Ah_j) y_0 = (\exp(Ah))^j y_0 \Rightarrow$

$$\| y(t_j) - y_j \| = \| \sum_{\ell=0}^{j-1} \underbrace{(e^{Ah})^\ell}_{\| \| \le C} \underbrace{(e^{Ah} - P_s(Ah))}_{\| \| = O(h^{s+1})} \cdot \underbrace{P_s(Ah)^{j-1-\ell}}_{\| \cdot \| \le C} y_0 \|$$

$$\le \underbrace{jh}_{\le T} C^2 \cdot \|y_0\| \cdot O(h^{s}) = O(h^s) \quad \square$$

On observe que

$y(t_j) = e^{A\cdot jh}\cdot y_0 = (e^{Ah})^j\cdot y_0$, $y_j = P_s(Ah)^j y_0$,

donc le lemme suivant peut être utile.

<u>Lemme</u> : Soit $C, q>0$ t.q. $\forall j\geq 0 : \|M^j\| \leq C q^j$, alors

$$\|M^j - N^j\| \leq j\cdot C^2\cdot q^{j-1}\cdot\|M-N\|\cdot\left(1+\frac{C\cdot\|M-N\|}{q}\right)^{j-1}$$

<u>Preuve</u> : en posant $e_j := \|M^j - N^j\|$; $e_0 = 0$:

$$e_j \leq \sum_{l=0}^{j-1}\|M^{j-l-1}(M-N)\cdot N^l {}^{-M^l+M^l}\|$$

$$\leq \sum_{l=1}^{j-1} C\cdot q^{j-l-1}\cdot e_1\cdot e_l + \underbrace{\sum_{l=0}^{j-1} C q^{j-l-1} e_1 C q^l}_{= j C^2 q^{j-1}\cdot e_1}$$

<u>donc correct pour $j=1$</u> (car $C\geq 1$)

ensuite par récurrence :

$$e_j \leq j\cdot C^2 e_1\cdot q^{j-1}\underbrace{\left(1+\frac{C\cdot e_1}{q}\cdot\sum_{l=1}^{j-1}\left(1+\frac{Ce_1}{q}\right)^{l-1}\right)}_{\leq\left(1+\frac{Ce_1}{q}\right)^{j-1}}$$

<u>idée</u> : inégalité de Gronwall discrète ■

Supposons pour simplifier que A soit semi-définie négative, c'est-à-dire, $\forall x\in\mathbb{C}^n$: $Re(x^*Ax)\leq 0$.

<u>On admet</u> que pour une matrice C semi-déf. nég. $\|\exp(C)\|\leq 1$.

Nous pouvons donc choisir $M = e^{Ah}$, $C=q=1$, et le lemme nous donne avec $\Delta(h) = \|e^{Ah} - P_s(Ah)\|/h = O(h^s)_{h\to 0}$

$$\max_{0\leq j\leq J}\|y(t_j)-y_j\| \leq T\cdot\Delta(h)\cdot\left(1+h\cdot\Delta(h)\right)^J\cdot\|y_0\|$$

$$\leq T\cdot\Delta(h)\cdot\exp(T\cdot\Delta(h))\|y_0\| = O(h^s)_{h\to 0}$$

Pourtant, si A admet un élément propre (λ, x) (forcément $Re(\lambda)\leq 0$) avec $Re(\lambda)$ de grand module, alors pour $h>0$ de taille modeste $|P_s(\lambda h)|>1$ et pour $y_0 = x$: $|P_s(-3)|\geq 2$

$|y_J - y(t_J)| = \|(P_s(\lambda h)^J - e^{\lambda T})x\|$ ~~n'est pas~~ $\gtrsim \|x\|$

n'est pas petit ! ($\Delta(h)$ n'est pas petit !)

Moralité : on obtient stabilité et une petite erreur seulement pour $h > 0$ très petit si A (ou en général la Jacobienne $\frac{\partial f}{\partial y}$) admet une valeur propre de module grande, ce qui correspond aux EDO dites "raides".

Considérons : $\dot{y} = Ay + g(t, y)$, $y(0) = y_0$

avec norme de Jacobienne $\frac{\partial g}{\partial y}$ petite (une sorte de perturbation). Peut apparaître dans discrétisation de l'équation d'advection-diffusion où A représente discrétisation du Laplacien, et g discrétisation d'une dérivée du 1^er^ ordre ou d'un second membre. Aussi Schrödinger, Navier-Stokes etc.
Aussi A semi-déf. négative $= \forall x \in \mathbb{C}^n \ \mathrm{Re}(x^* A x) \leq 0$.

1.3.3. Procédure de splitting

Ici on cherche y_j fonction approx. de y sur $[t_j, t_{j+1}]$.

En posant $y = e^{A(t-t_j)} z_j$, $\dot{y} - Ay = e^{A(t-t_j)} \dot{z}_j(t) = g(t, e^{A(t-t_j)} z_j(t))$

Pour un paramètre $\Theta \in [0,1]$, on remplace $e^{A(t-t_j)}$ par $e^{Ah\Theta}$ (approximation) et on pose $e^{Ah\Theta} z_j(t) = x_j(t)$

donc
$$\begin{cases} x_j(t_j) = e^{Ah\cdot\Theta} \cdot z_j(t_j) = e^{Ah\Theta} y_j(t_j) & \begin{cases} = y_0 & \text{si } j = 0 \\ = y_{j-1}(t_j) & \text{si } j > 0 \end{cases} \\ \dot{x}_j = g(t, x_j(t)) \text{ sur } [t_j, t_{j+1}] \\ y_j(t_{j+1}) = e^{Ah} z_j(t_{j+1}) = e^{Ah(1-\Theta)} \cdot x_j(t_{j+1}) \end{cases}$$

Erreur ? pour problème test $g(t, y) = By$ ($AB \neq BA$ possible)

solution exacte $y(t_j) = \exp((A+B)\cdot t_j) y_0 = [\exp((A+B)h)]^j y_0$

$y_j(t_j) = [e^{Ah(1-\Theta)} \cdot e^{Bh} e^{Ah\Theta}]^j y_0$

On utilise notre lemme 1.3.2, avec $C = 1$, $q = e^{\|B\| h}$ (car $A + B - \|B\| I$ est semi déf. négative), et obtient avec $\Delta(h) = \frac{1}{h} \cdot \| e^{Ah(1-\Theta)} e^{Bh} e^{Ah\Theta} - e^{(A+B)h} \|$ pour $j = 0, \dots, J$

$$\max_{0 \leq j \leq J} \| y(t_j) - y_j(t_j) \| \leq T \cdot e^{T\|B\|} \Delta(h) \cdot \exp\left(\frac{T \cdot \Delta(h)}{\exp(\|B\| \cdot h)} \right)$$

$\Delta(h) = \begin{cases} O(h) & \text{si } \Theta = 0 \text{ splitting de Godunov} \\ O(h^2) & \text{si } \Theta = 1/2 \text{ splitting de Strang} \end{cases}$

Même conclusion pour $\theta \neq 1/2$ $s \in \{1,2\}$ et $\theta = 1/2$ $s=2$ si au lieu de résoudre l'EDO $\dot{x}_j(t) = g(t, x_j(t))$ sur $[t_j, t_{j+1}]$ on utilise nos méthodes de RK explicit d'ordre s de pas h à condition que $\rho(P_s(hB)) < 1$ (h suff. petit),

(~~étudier~~ $\cancel{\| [e^{(A+B)h}]^j - [e^{Ah\theta} P_s(Bh) e^{Ah(1-\theta)}]^j \|}$

~~ou pour g général Lemme de Gronwall discret~~)

mais le choix de h ne dépend ~~plus de~~ contrent A !

1.3.4. Méthodes de RK exponentielles

En partant de $y(t) = e^{A \cdot t} z(t)$, $e^{A \cdot t} \dot{z}(t) = g(t, y(t))$

on obtient $y(t_{j+1}) = e^{Ah} y(t_j)$

$$+ e^{Aht_{j+1}} (z(t_{j+1}) - z(t_j))$$

$$\Rightarrow y(t_{j+1}) = e^{Ah} y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{A(t_{j+1}-s)} g(s, y(s)) ds$$

L'idée est maintenant de remplacer $s \to g(s, y(s))$ par polynôme d'interpolation de degré $s-1$ (interpolation en t_n pour $s=1$, en t_n et $t_n + ch$ pour $s=2$), avec les approximations $g(t_j, y(t_j)) \simeq g(t_j, y_j) = \tilde{k}_1$

$g(t_j + ch, y(t_j + ch)) \simeq g(t_j + ch, \underset{\text{pour pas } ch}{\text{prediction RK}_1}) =: \tilde{k}_2$

$\Rightarrow$ pour $s=1$: $y_{j+1} = e^{Ah} y_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{A(t_{j+1}-t)} \tilde{k}_1 \, dt$

$$= e^{Ah} y_j + h \cdot \varphi_1(Ah) \cdot \tilde{k}_1$$

pour $s=2$: $y_{j+1} - e^{Ah} y_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{A(t_{j+1}-s)} \left(\tilde{k}_1 + \frac{\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1}{(t_n + ch) - t_n} (s - t_n) \right) ds$

$$= h \cdot \varphi_1(hA) \cdot \tilde{k}_1 + \frac{h}{c} \cdot \varphi_2(hA) \cdot (\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1)$$

avec $\varphi_\ell(z) = \frac{1}{(\ell-1)!} \int_0^1 e^{(1-u)z} u^{\ell-1} ds$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\ell+k)!} = \frac{\varphi_{\ell-1}(z) - \varphi_{\ell-1}(0)}{z}$$

$\varphi_2(0) = \frac{1}{2}$ comme avant!

Pour notre problème test $g(t, y) = By$:

$$\tilde{k}_1 = B y_j \qquad y_j = (\underbrace{e^{Ah} + \varphi_1(Ah) \cdot Bh}_{E_1(Ah,\, Bh)})^j y_0 \qquad \underline{\underline{s=1}}$$

$$\tilde{k}_2 = B \cdot \left(e^{Ahc} + \varphi_1(Ahc)\, Bhc\right) y_j$$

$$y_j = (\underbrace{e^{Ah} + \underbrace{\varphi_1(Ah)}_{I + \varphi_2(Ah)\cdot Ah} Bh + \underbrace{\tfrac{1}{c}\, \varphi_2(hA)\, Bh\, \varphi_1(Ahc)\, (A+B)h}_{= \varphi_2(hA) Bh \cdot \frac{e^{Ahc} - I + \varphi_1(Ahc) Bhc}{c}}}_{E_2(Ah,\, Bh)})^j y_0$$

$$e^{Ahc} - I = \varphi_1(Ahc)\, Ahc$$

donc comme dans 1.3.3.

$$\max_{0 \le j \le J} |y(t_j) - y_j| \le T \cdot e^{T \cdot \|B\|} \cdot \Delta_s(h) \exp\left(\frac{T \cdot \Delta_s(h)}{\exp(\|B\| \cdot h)}\right)$$

$$\text{avec } \Delta_s(h) = \frac{1}{h} \| e^{Ah+Bh} - E_s(Ah, Bh) \| = \mathcal{O}(h^s).$$