§ 1.2. Quelques applications

1.2.1. Racines et puissances fractionnaires

Pour $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la façon classique de définir (la branche principale de) $f(z) = z^\gamma$ sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ est par coordonnées polaires : soit $z = r e^{i\varphi}$ avec $r > 0$, et $\varphi \in]-\pi, \pi[$, alors $z^\gamma := r^\gamma \cdot e^{i\gamma\varphi} = \exp(\gamma\{\log r + i\varphi\})$ ($\Rightarrow$ f analytique dans Ω).

Pour $-1 < \gamma < 0$, f admet une représentation comme fonction de Markov $f(z) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{z-x}$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ et μ une mesure sur $[a,b]$, ici
$$z^\gamma = \frac{\sin(\pi|\gamma|)}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{|x|^\gamma}{z-x}\, dx,$$
donc par exemple
$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi\sqrt{|x|}} \cdot \frac{dx}{z-x},$$
et $\sqrt{z}$ s'écrit comme z fois une fonction de Markov.

$f(z) = \sqrt{z}$ pour matrices apparaît par exemple dans l'étude de certaines EDS (voir références dans [BB, LR]), mais aussi dans des "moyennes géométriques" : pour $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ h.d.p. on note par $X = A \# B$ l'unique solution h.d.p. de l'équation $X \cdot A^{-1} \cdot X = B$ (on pose $X = B^{1/2} \cdot Z B^{1/2}$ et on se ramène à l'équation $Z \cdot [B^{-1/2} A B^{-1/2}]^{-1} Z = I$ ou encore $Z^2 = B^{-1/2} A B^{-1/2} \Rightarrow A \# B = B^{1/2} (B^{-1/2} A B^{-1/2})^{\frac{1}{2}} B^{1/2}$).

On peut par exemple montrer (exo) :

$X = X^*$: $\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix}$ h.s.d.p. $\Leftrightarrow$ $A \# B - X$ h.s.d.p.

1.2.2. Le logarithme

$f(z) = \log(z)$ est également défini et analytique sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ par $\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$.
$r > 0$, $\varphi \in]-\pi, \pi[$.

Il s'agit également d'une modification d'une fonction de Markov :

$$\frac{\log(1+z)}{z} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{(-1/x)}{z-x}\, dx .$$

Le log.
~~Il~~ peut s'avérer utile dans le calcul d'un déterminant sachant que

$$\det(A) = \prod \lambda_j = \exp\left(\sum \log(\lambda_j) \right) = \exp(\operatorname{trace} \log(A)).$$

Le logarithme apparaît également dans l'étude de certaines chaînes de Markov à n étapes. Une matrice $P(t)$ est dite matrice de transition si son élément (i,j) désigne la probabilité qu'un objet à l'état i au temps s va passer à l'état j au temps $(t+s)$. Donc $P(t)$ admet des éléments ≥ 0, et l'élément propre $\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ à droite.
De plus nous avons les propriétés d'un semi-groupe
$\forall t, s \geq 0 : P(s)P(t) = P(s+t)$ ce qui implique que
$P(t) = \exp(t \cdot \underset{(H)}{Q})$ avec $Q = \log P(1)$ le générateur.
On peut montrer que une matrice Q admet des éléments hors diag. $\geq 0 \iff \forall t \geq 0 : \exp(t \cdot Q)$ admet des éléments ≥ 0.

1.2.3. La fonction signe

Nous avons $\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ -1 & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \\ \text{non défini sinon} & \end{cases} = z \cdot (z^2)^{-1/2}$.

Notons que $f(z) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}(z))$ donne un projecteur : soit A diagonalisable sans valeurs propres $\in i\mathbb{R}$, alors $\mathbb{C}^n = N + P$ avec N (et P) l'espace engendré par les vecteurs propres pour λ avec $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ (et $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, respectivement), alors $f(A)|_P = \text{identité}|_P$, $f(A)|_N = 0|_N$.

En QCD (lattice quantum chromodynamics), on est amené à résoudre des grands systèmes $Ax = b$ (à l'aide des méthodes de Krylov necessitant une boite noire efficace pour le produit $A \cdot c$) avec $A = \mathrm{diag}(\pm 1) - \mathrm{sign}(H)$ et H creuse et hermitienne. Ici il est hors de question de calculer $\mathrm{sign}(H)$ pour former $\mathrm{sign}(H) \cdot c$ pour un vecteur c [voir A. Frommer et collaborateurs]

Le signe apparaît aussi pour écrire la solution de certains équations de Sylvester $AX - XB = C$ dans l'inconnue X.

D'après 1.1.8 :

$$f\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(A) & f(A)\cdot X - X \cdot f(B) \\ 0 & f(B) \end{bmatrix}$$

et si $\sigma(A) \subset \{\mathrm{Re}(z) < 0\}$, $\sigma(B) \subset \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ (come souvent en contrôle linéaire, par exemple dans le cas particulier $B = -A^*$ de Lyapunov) alors $\mathrm{signe}(A) = -I = -\mathrm{signe}(B)$, et

$$\mathrm{signe}\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -I & -2X \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Dans [H, p.40] on décrit une approche similaire por l'équation de Ricatti $XFX = A^*X + XA + G$.

<u>1.2.4. Exo</u> Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ de sorte que $\sigma(A \cdot B) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$. Alors

$$\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$ avec

$C = A(BA)^{-1/2} = (AB)^{1/2} \cdot B^{-1}$.

$(A(BA)^{-1/2}) ((AB)^{1/2} B^{-1})^{-1}$

1.2.5 Systèmes d'EDO et l'exponentielle

Partant d'une EDP parabolique (chaleur?)

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x,t) + L w(x,t) = f(x,t) + BC + IC$$

avec L un opérateur différentiel en espace, on se ramène souvent à un système d'EDO par une discrétisation en espace : pour un e.v. d'EF V_h de dimension finie et de base $v_{1,h}, \dots, v_{n,h}$ on cherche $w_h(x,t) = \sum_j y_j(t) \cdot v_{j,h}(x)$ de sorte que

$$< \frac{\partial}{\partial t} w_h + L w_h - f, v > = 0 \quad \forall v \in V_h .$$

Ceci donne lieu à

$$M \dot{y}(t) + K y(t) = f(t) \quad , y(0) \in \mathbb{R}^n \text{ donné}$$

avec $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, $M = (< v_{j,h}, v_{k,h} >)$ s.d.p matrice de masse, et $K = (< v_{j,h}, L v_{k,h} >)$ matrice de raideur.

En introduisant (par exemple) la décomposition de Cholesky $M = C \cdot C^T$ et la variable $x(t) = C^T y(t)$, nous nous ramenons à ($A = C^{-1} K C^{-T}$)

$$\dot{x}(t) = A x(t) + g(t) , \; x(0) \in \mathbb{R}^n \text{ donné}.$$

Pour $g(t) = 0$ (équation homogène) on trouve la solution $x(t) = \exp(At) x(0)$, et en général (variation de la constante)

$$x(t) = \exp(At) x(0) + \int_0^t \exp(A(t-s)) g(s) ds$$

en particulier pour $g(t) = g(0)$ constant (calcul de primitive en developpant en series)

$$x(t) = \exp(At) x(0) + \underbrace{A^{-1} (\exp(At) - I) g(0)}_{= t \cdot \varphi_1(At) g(0)}$$

avec $\varphi_1(z) = \dfrac{\exp(z) - 1}{z}$.

Pour des systèmes d'EDO d'ordre 2 on peut se ramener à un système d'ordre 1, ou sinon écrire la solution à l'aide aussi des fonctions de matrices trigonométriques. $\square$

1.2.6. Lien avec contrôle linéaire (continue)

Un système dynamique linéaire stationnaire (continue) à m entrées et p sorties $(n \geq m, p)$ consiste à trouver la sortie $y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^p)$ reliée à l'entrée $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$ par

$$y(t) = \underset{\mathbb{C}^{p\times n}}{C}\, x(t), \quad \dot{x}(t) = \underset{\mathbb{C}^{n\times n}}{A}\, x(t) + \underset{\mathbb{C}^{n\times m}}{B}\, u(t), \quad x(0) = 0, \quad \sigma(A) \subset \{\mathrm{Re}(z) < 0\}$$

En introduisant la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(x)(s) = \int_0^\infty \exp(-st)\, x(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

on observe par intégration par parties que

$$\mathcal{L}(\dot{x})(s) = s \cdot \mathcal{L}(x)(s),$$ et alors

$$\mathcal{L}(x)(s) = (sI - A)^{-1} B\, \mathcal{L}(u)(s),$$ donc:

$$\mathcal{L}(y)(s) = \underbrace{C \cdot (sI - A)^{-1} B}_{=: R_n(z)}\, \mathcal{L}(u)(s)$$

dite fonction de transfer

Notons que par exemple dans la simulation des circuits RCL des microprocesseurs $n \geq 10^6$, et un des objectifs est de remplacer

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0_{p\times m} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+p)\times(n+m)} \quad \text{par} \quad \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(\tilde{n}+p)\times(\tilde{n}+m)}$$

(réduction de modèle) de sorte que la sortie du nouveau système pour la même entrée u ne soit pas trop loin de $y(t)$.

Comme d'après Plancherel $\|\mathcal{L}(y)\|_{L^2(i\mathbb{R})} = \|y\|_{L^2(\mathbb{R})}$

on souhaite alors que la différence des deux fonctions $R_n, R_{\tilde{n}}$ de transfer soit "petite" en norme sur l'axe imaginaire, et $\sigma(\hat{A}) \subset \{\mathrm{Re}(z) < 0\}$.

On peut calculer des nombres $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ dites valeurs de Hankel de sorte que, pour tout choix de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \| R_n(s) - \tilde{R}_{\tilde{n}}(\xi) \| \geq \sigma_{\tilde{n}}$,

et Glover [1984] montre qu'une certaine construction dite "balanced truncation" fournit $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ avec

$$\sup_{s \in i\mathbb{R}} \| R_n(s) - \tilde{R}_{\tilde{n}}(s) \| \leq 2(\sigma_{\tilde{n}} + \sigma_{\tilde{n}+1} + \dots + \sigma_n),$$

pourtant leur construction est coûteuse (SVD).

On montre dans [Antoulas, Soerensen 2002] que les σ_j sont les valeurs singulières de la solution X de l'équation de Sylvester $AX + XA = B \cdot C$. ∎

1.2.7. L'exponentielle et l'équation de Sylvester

Soient $\sigma(A), \sigma(-B) \subset \{\operatorname{Re} z < 0\}$, alors l'EDO matricielle $\dot{Y} = AY - YB$, $Y(0) = C$ admet comme solution $Y(t) = \exp(+tA) \cdot C \exp(-tB)$.

Notons que $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0$, donc pour $X = -\int_0^\infty \exp(tA) \cdot C \exp(-tB)\, dt$ on trouve après intégration de notre EDO

$$AX - XB = -\int_0^\infty \dot{Y}(t)\, dt = Y(0) - Y(\infty) = C$$

donc on a trouvé la solution de notre équation de Sylvester. D'ailleurs,

$$e^{sA} X - X e^{sB} = -\int_0^\infty e^{(t+s)A} \cdot C e^{-tB}\, dt + \int_0^\infty e^{tA} C e^{(-t+s)B} = \int_0^s e^{tA} C e^{(s-t)B}\, dt$$

ce qui d'après 1.1.8. donne

$$\exp\left(s \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \exp(sA) & \int_0^s e^{tA} \cdot C e^{(s-t)B}\, dt \\ 0 & \exp(sB) \end{bmatrix}$$