Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées

Examen d'Analyse Fonctionnelle Appliquée

18 Décembre 2008 (durée 3 heures)

Seules les notes manuscrites sont autorisées. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 Désignons par φ une fonction appartenant à la classe de Schwartz $S(\mathbb{R})$ et par $\widehat{\varphi}$ sa transformée de Fourier. Rappelons que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\varphi(x)\,dx$. Rappelons aussi que l'on dit qu'une série de nombres complexes $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |a_n| < +\infty$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2n\pi)$ est absolument convergente.

b) Désormais, nous posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2n\pi)$. Montrer que f est une fonction 2π-périodique et que f est de classe C^∞ sur $[0, 2\pi]$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(k)}{2\pi} e^{ikx}$ est absolument convergente.

b) Désormais, nous posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(k)}{2\pi} e^{ikx}$. Montrer que $\widetilde{f}$ est une fonction 2π-périodique et que $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ sur $[0, 2\pi]$.

3) Rappelons que $(c_l(g))_{l\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, est définie pour tout $l \in \mathbb{Z}$, par $c_l(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ilx}\,dx$; rappelons également que l'on a $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $c_l(g) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$. En utilisant ces rappels, montrer que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \widetilde{f}(x)$.

4) En utilisant la question 3), montrer que l'on a pour tout réel $a > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi^2 n^2 a} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Nous désignons par C un sous-ensemble convexe de E vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in E$, il existe un réel $a > 0$ tel que $x \in aC$ (rappelons que pour tout $B \subset E$ et pour tout $d \in \mathbb{R}$, $dB = \{db\ ;\ b \in B\}$). Nous désignons par L_0 un sous-ensemble de E vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) Il existe $x_0 \in E$ et il existe W_0 un sous-espace vectoriel de E tels que $L_0 = W_0 + x_0$ (rappelons que pour tout $B \subset E$ et tout $x \in E$, $B + x = \{b + x;\ b \in B\}$).

(ii) $L_0 \cap C = \emptyset$.

1) Montrer que $0 \in C$ puis que $x_0 \notin W_0$.

2) Désignons $\rho : E \to \mathbb{R}_+$, l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\rho(x) = \inf\{a;\ a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } x \in aC\}.$$

Montrer que pour tous $x_1, x_2 \in E$, $\rho(x_1 + x_2) \leq \rho(x_1) + \rho(x_2)$ et que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in E$, $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$.

3) En utilisant les deux questions précédentes, montrer qu'il existe f une forme linéaire définie sur E et vérifiant les deux propriétés suivantes :

(a) Pour tout $y \in L_0$, $f(y) = 1$.

(b) Pour tout $c \in C$, $f(c) \leq 1$.

Exercice 3 Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite finie de réels (l'entier $n \geq 1$ peut prendre toute valeur et dépend de la suite considérée), on dit que σ est une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ si et seulement si $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ et on note $\Delta(\sigma)$ la quantité $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$. L'ensemble de toutes les subdivisions de $[0,1]$ est noté par S.

On désigne par $B([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach des fonctions à valeurs complexes, définies et bornées sur $[0,1]$ i.e. $B([0,1], \|\cdot\|_\infty) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C};\ \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < +\infty\}$ et on désigne par $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs complexes.

Soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction fixée ; on dit qu'une fonction $f \in C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est intégrable au sens de Stieljes avec la fonction déterminante α si et seulement si il existe $I \in \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ telle que pour toute subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ vérifiant $\Delta(\sigma) \leq \eta$ on a

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \right| \leq \epsilon. \qquad (*)$$

~~I est alors noté par $\int_0^1 f(x)\, d\alpha(x)$.~~

1) Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\int_0^1 f(x)\, d\alpha(x)$ existe pour tout $f \in C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, est que α soit à variations bornées, ce qui signifie que

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})|;\ \sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \in S \right\} < +\infty.$$

Par la suite, on admet que cette condition nécessaire est également une condition suffisante.
<u>Indications:</u> On prend d'abord dans $(*)$ $\epsilon = 1$, le η correspondant à ce choix de ϵ est noté par η_1 et on pose $S_1 = \{\sigma \in S;\ \Delta(\sigma) \leq \eta_1\}$. On applique ensuite le Théorème de Banach-Steinhaus à $(T_\sigma)_{\sigma \in S_1}$, la famille de formes linéaires sur $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ définies pour tout $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n} \in S_1$ et tout $f \in C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ par $T_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$. Enfin on calcule $T_\sigma(f_0)$ où f_0 est une fonction de $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ vérifiant $\|f_0\|_\infty \leq 1$ et pour tout $k = 1, \ldots, n$, $f_0(x_{k-1}) = \exp(-i \arg(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})))$ (ici $\arg(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$ désigne l'argument du nombre complexe $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, de plus lorsque ce nombre complexe est nul on pose $f_0(x_{k-1}) = 0$).
2) On désigne par U une forme linéaire continue sur $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, montrer qu'il existe $\widetilde{U}$ une forme linéaire continue sur $B([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ telle que $\|U\| = \|\widetilde{U}\|$ et pour tout $f \in C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ on a $\langle U, f \rangle = \langle \widetilde{U}, f \rangle$.
3) Pour tout $s \in]0,1]$, la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,s]$ est notée par χ_s, de plus on pose $\chi_0 = 0$. On désigne par g la fonction définie pour tout $s \in [0,1]$ par $g(s) = \langle \widetilde{U}, \chi_s \rangle$. Montrer que g est une fonction à variations bornées.
<u>Indication:</u> Soient $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $h = \sum_{k=1}^{n} a_k(\chi_{x_k} - \chi_{x_{k-1}})$, où pour tout $k = 1, \ldots, n$, $a_k = exp(-i \arg(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ (avec la convention que $a_k = 0$ lorsque $g(x_k) = g(x_{k-1})$. On pourra calculer $\langle \widetilde{U}, h \rangle$.

4) Soit $f \in C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ vérifiant la propriété suivante. Pour toute subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le n}$ vérifiant $\Delta(\sigma) \le \eta$ on a

$$\left| \langle \widetilde{U}, h_1 \rangle - \int_0^1 f(x)\, dg(x) \right| \le \epsilon,$$

où $h_1 = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(\chi_{x_k} - \chi_{x_{k-1}})$.
5) Déduire de la question 4) que $\langle U, f \rangle = \int_0^1 f(x)\, dg(x)$.

Exercice 4 Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. On désigne par $S = \{x \in E;\ \|x\| = 1\}$ la sphère unité. Montrer que l'adhérence de S au sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$ est la boule unité $B = \{x \in E;\ \|x\| \le 1\}$.
Indications: Soit $x_0 \in B$. Il suffit de prouver que $V = \{x \in E;\ \max_{1 \le k \le n} |\langle f_k, x - x_0 \rangle| < \epsilon\}$ a une intersection non vide avec S ; ici $\epsilon > 0$ est un réel arbitraire et fixé, $n \ge 1$ est un entier arbitraire et fixée, et$f_1, \ldots, f_n \in E'$ sont arbitraires et fixées. Pour cela, on montrera d'abord qu'il existe y_0 un élément non nul de E tel que pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\langle f_k, y_0 \rangle = 0$. Ensuite on pourra considérer l'application $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\lambda \mapsto \|x_0 + \lambda y_0\|$.

Correction succinte
de l'examen d'Analyse
Fonctionnelle Appliquée
du 18 Décembre 2008

<u>Exercice 1</u> 1) a) Etant donné que la fonction φ appartient à la classe de Schwartz, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_{1,m} > 0$ telle que pour [redacted] tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|\varphi^{(m)}(t)| \leq C_{1,m}(4\pi + |t|)^{-2}. \quad (1)$$

Il en résulte que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+2n\pi)| \leq C_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (4\pi + |x+2n\pi|)^{-2} < +\infty.$$

On notera que la dernière série est convergente car $(4\pi + |x+2n\pi|)^{-2} \underset{+\infty}{\sim} (2\pi n)^{-2}$.

b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2(n+1)\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2n\pi) = f(x).$$

Montrons maintenant que f est de classe C^∞ sur $[0,2\pi]$. Il suffit de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série de fonctions

$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi^{(m)}(\cdot + 2m\pi)$ est normalement convergente dans l'espace de Banach $C([0,2\pi], \|\cdot\|_\infty)$. On a d'après (1) et d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi^{(m)}(\cdot + 2m\pi)\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |\varphi^{(m)}(x+2m\pi)|$$

$$\leq C_{1,m} \sup_{x\in[0,2\pi]} (4\pi + |x+2m\pi|)^{-2}$$

$$\leq C_{1,m} \sup_{x\in[0,2\pi]} (4\pi + |2m\pi| - |x|)^{-2}$$

$$\leq C_{1,m} (2\pi + |2m\pi|)^{-2}. \quad (2)$$

Il résulte de (2) que $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \|\varphi^{(m)}(\cdot + 2m\pi)\|_\infty < +\infty$.

2) a) Etant donné que la fonction φ appartient à la classe de Schwartz, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C'_{1,\ell} > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C'_{1,\ell} (1+|\xi|)^{-\ell}. \quad (3)$$

Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\varphi}(k) e^{ikx}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(k)|$$

$$\leq \frac{C'_{1,\ell}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|)^{-\ell} < +\infty,$$

quitte à supposer que $\ell \geq 2$.

b) Il résulte de la périodicité de la fonction $x \mapsto e^{ikx}$ que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x+2\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(k)}{2\pi} e^{ik(x+2\pi)}$
$= \tilde{f}(x)$.

Montrons maintenant que $\tilde{f}$ est de classe C^∞ sur $[0,2\pi]$.

Il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série de fonctions obtenue en dérivant m fois le terme général de la série $\tilde{f}$ est normalement convergente dans l'espace de Banach $C([0,2\pi], \|\cdot\|_\infty)$. On a d'après (3),

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\varphi}(k)|}{2\pi} \sup_{x\in[0,2\pi]} |(ik)^m e^{ikx}|$$

$$\leq C'_{1,\ell} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|k|)^{-\ell+m}}{2\pi} < +\infty,$$

quitte à supposer que $\ell - m > 1$.

3) D'après les rappels, pour montrer que l'on a $f = \tilde{f}$, il suffit de montrer que $(c_\ell(f))_{\ell \in \mathbb{Z}}$ et $(c_\ell(\tilde{f}))_{\ell \in \mathbb{Z}}$ les suites respectives des coefficients de Fourier de f et $\tilde{f}$ sont égales. On a en utilisant le Théorème de convergence dominée, la 2π-périodicité de la fonction $x \mapsto e^{i\ell x}$ et la définition de la transformée de Fourier,

$$c_\ell(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2m\pi)\right)e^{-i\ell x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(x+2m\pi)\,e^{-i\ell x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\varphi(y)\,e^{-i\ell(y-2m\pi)}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\varphi(y)\,e^{-i\ell y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,e^{-i\ell y}\,dy = \frac{\hat{\varphi}(\ell)}{2\pi}.$$

Par ailleurs, il résulte du Théorème de convergence dominée et de l'égalité

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x}\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=l \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

que

$$c_l(\check{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(k)e^{ikx}\right)e^{-ilx}\,dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(k)\int_0^{2\pi}e^{i(k-l)x}\,dx = \frac{\hat{\varphi}(l)}{2\pi}.$$

4) Pour tout réel $a>0$ désignons par g_a la fonction définie pour tout réel x, par $g_a(x) = e^{-ax^2}$.

D'après le cours, on sait que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, $\hat{g}_a(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-\xi^2/4a}$. Il résulte de 3) que l'on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+2\pi m)^2} = 2^{-1}(\pi a)^{-1/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2/4a}e^{ikx}.$$

En prenant $x=0$, on obtient

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-a4\pi^2m^2} = 2^{-1}(\pi a)^{-1/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2/4a}.$$

Exercice 2 1) Supposons que $x_0 \in W_0$, on aurait alors $L_0 = W_0$. Par ailleurs nous savons qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $0 \in aC$ et cela signifie que $0 = a^{-1}0 \in C$. Ainsi lorsqu'on suppose que $x_0 \in W_0$, il en résulte que $0 \in L_0 \cap C$ ce qui contredit l'hypothèse $L_0 \cap C = \emptyset$.

2) Montrons que l'application $\rho : E \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in E$ par

$$\rho(x) = \inf\{a \in \mathbb{R}_+^* / x \in aC\} \quad (4)$$

est sous-linéaire. Soient $x_1, x_2 \in E$, nous savons que x_1 et x_2 peuvent s'écrire sous la forme $x_1 = a_1 c_1$ et $x_2 = a_2 c_2$ où $c_1, c_2 \in C$ et a_1, a_2 sont des réels strictement positifs vérifiant

$$a_1 \geq \rho(x_1) \text{ et } a_2 \geq \rho(x_2). \quad (5)$$

On a alors en utilisant la convexité de C,

$$(a_1 + a_2)^{-1}(x_1 + x_2) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} c_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} c_2 \in C,$$

ce qui signifie que $x_1 + x_2 \in (a_1 + a_2)C$. Il en résulte que $\rho(x_1 + x_2) \leq a_1 + a_2$ et par conséquent que $\rho(x_1 + x_2) \leq \rho(x_1) + \rho(x_2)$. Montrons maintenant que pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $x \in E$, $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$. Pour tout réel positif a vérifiant

$a > \lambda \rho(x)$ on a $\lambda^{-1} a > \rho(x)$ et par conséquent $x \in (\lambda^{-1} a) C$ i.e. $\lambda x \in aC$, on en déduit que $\lambda \rho(x) \geqslant \rho(\lambda x)$. L'inégalité inverse est également vérifiée ; on a en effet pour tout réel $b > \rho(\lambda x)$, $\lambda x \in bC$ i.e. $x \in \lambda^{-1} bC$ et par conséquent $\lambda^{-1} b \geqslant \rho(x)$ i.e. $b \geqslant \lambda \rho(x)$.

3) Désignons par W le sous-espace vectoriel de E engendré par W_0 et par x_0 ; ainsi W est l'ensemble des $z \in E$ tels que

$$z = v + \alpha x_0 , \quad (6)$$

où $v \in W_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, d'après 1) on a l'unicité de la décomposition (6). On peut donc définir une forme linéaire g sur W en posant

$$g(z) = \alpha . \quad (7)$$

Notons également que compte tenu de la définition de L_0, on a $L_0 \subset W$ et pour tout $y \in L_0$,

$$g(y) = 1 . \quad (8)$$

Montrons maintenant que pour tout $z \in W$, on a

$$g(z) \leqslant \rho(z) . \quad (9)$$

Cette inégalité est vérifiée lorsque $\alpha \leqslant 0$, car $\rho(x) \geqslant 0$

pour tout $x \in E$. Désormais nous supposons que $\alpha > 0$, on a alors $y = \alpha u$, où $u = \alpha^{-1} v + x_0 \in L_0$. L'hypothèse $L_0 \cap C = \emptyset$ entraîne que $p(u) \geq 1$, car sinon il existe $a \in]0,1[$ et $c \in C$ tels que $u = ac$, et on aurait alors $u = ac + (1-a)0 \in C$. Il en résulte que $g(y) = \alpha p(u) \geq \alpha = g(y)$, ce qui montre que l'inégalité (9) est également vérifiée lorsque $\alpha > 0$. Il résulte alors du théorème d'extension dominée de Hahn-Banach qu'il existe f une forme linéaire sur E vérifiant pour tout $y \in W$,

$$f(y) = g(y) \qquad (10)$$

et pour tout $x \in E$,

$$f(x) \leq p(x). \qquad (11)$$

Il résulte alors de (8) et de (10) que l'on a pour tout $y \in L_0$, $f(y) = 1$. De plus, il résulte de (11) que pour tout $c \in C$ on a $f(c) \leq p(c) \leq 1$.

<u>Exercice 3</u> 1) Pour toute subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq m}$ désignons par T_σ la forme linéaire sur $C([0,1])$ définie pour tout $f \in C([0,1])$ par

$$T_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})\big(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\big). \qquad (12)$$

Il est clair que

$$|T_\sigma(f)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |g(x_k)-g(x_{k-1})|\right) \|f\|_\infty$$

et cela montre que T_σ est continue. Par ailleurs, étant donné que f est intégrable au sens de Stieltjes, il existe un réel $\eta_1 > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ vérifiant $\Delta(\sigma) \leq \eta_1$ on a

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dg(x) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(g(x_k)-g(x_{k-1})) \right| \leq 1 .$$

L'inégalité triangulaire entraîne alors que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(g(x_k)-g(x_{k-1})) \right| \leq 1 + \left| \int_0^1 f(x)\,dg(x) \right|$$

et il en résulte que

$$\sup\left\{ |T_\sigma(f)| \,;\, \sigma \in S \text{ et } \Delta(\sigma) \leq \eta_1 \right\} < +\infty .$$

On peut donc appliquer le Théorème de Banach-Steinhaus à la famille de formes linéaires continues $(T_\sigma)_{\sigma \in S_1}$, où $S_1 = \{\sigma \in S \,;\, \Delta(\sigma) \leq \eta_1\}$ et d'après ce théorème il existe une constante $c_1 > 0$ (qui ne

dépend ni de σ ni de f) telle que pour tout $\sigma \in S$, et tout $f \in C([0,1])$ on a

$$|T_\sigma(f)| \leq c_1 \|f\|_\infty . \quad (13)$$

Désignons maintenant par $f_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$ l'application continue définie de la façon suivante. Pour tout $k = 1, \dots, m$

$$f_0(x_{k-1}) = \begin{cases} e^{-i \operatorname{Arg}(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}))} & \text{si } \varphi(x_k) \neq \varphi(x_{k-1}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$f_0(x_m) = 1, \quad f(x) = f(x_0) + \frac{(f(x_1) - f(x_0))}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

pour tout $x \in [x_0, x_1]$ et

$$f(x) = f(x_k) + \frac{(f(x_{k+1}) - f(x_k))}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

pour tout $k = 1, \dots, m-1$ et tout $x \in]x_k, x_{k+1}]$.

On a pour tout $k = 0, \dots, m-1$ et tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$,

$$|f(x)| \leq |f(x_k)| \left(1 - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right) + |f(x_{k+1})| \times \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)$$

$$\leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\}$$

D'où $\|f\|_\infty \leq \max_{0 \leq k \leq m} |f(x_k)| \leq 1$. (14)

Par ailleurs, il résulte de (12) et de la définition de f_0 que

$$T_\sigma(f_0) = \sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| . \quad (15)$$

(13), (14) et (15) entraînent que

$$\sup\left\{ \sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \; ; \; \sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq m} \in S \right\} < +\infty . \quad (16)$$

Supposons maintenant que $\tilde{\sigma} = (\tilde{x}_k)_{0 \leq k \leq m}$ est une subdivision de $[0,1]$ n'appartenant pas à S_1, alors il existe $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq m}$ une subdivision de S_1 et une injection $\varphi : \{0, \dots, m\} \longrightarrow \{0, \dots, m\}$ telle que pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$ on a $x_{\varphi(k)} = \tilde{x}_k$.
On a donc

$$\sum_{k=1}^{m} |\varphi(\tilde{x}_k) - \varphi(\tilde{x}_{k-1})| = \sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_{\varphi(k)}) - \varphi(x_{\varphi(k-1)})|$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{k=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{k=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| . \quad (17)$$

Finalement, il résulte de (16) et (17) que φ est à variations bornées.

2) Comme $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace vectoriel de $B([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ il résulte du Théorème d'extension continue de Hahn-Banach qu'il existe $\tilde{u}$ une forme linéaire continue sur $B([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ telle que pour tout $f \in C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ on a $\langle u, f \rangle = \langle \tilde{u}, f \rangle$ et $\|u\| = \|\tilde{u}\|$.

3) Montrons que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie pour tout $s \in [0,1]$ par $g(s) = \langle \tilde{u}, \chi_s \rangle$, où χ_s est la fonction indicatrice de $[0,s]$ lorsque $s > 0$ et $\chi_0 = 0$, est à variations bornées.
Désignons par h la fonction de $B([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ définie pour tout $s \in [0,1]$ par

$$h(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\chi_{x_k}(s) - \chi_{x_{k-1}}(s) \right), \quad (18)$$

où $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une subdivision arbitraire de $[0,1]$ et pour tout $k = 1, \dots, n$

$a_k = e^{-i \operatorname{Arg}(g(x_k) - g(x_{k-1}))}$ avec la convention que $a_k = 0$ lorsque $g(x_k) = g(x_{k-1})$. On a $h(0) = 0$;

lorsque $s \in]0,1]$, il existe un unique $k(s) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $s \in]x_{k(s)-1}, x_{k(s)}]$ et

par conséquent $h(s) = a_k(s)$. Il en résulte que $\|h\|_\infty \leq 1$. Par ailleurs, compte tenu de la définition de la fonction g, de la linéarité de $\tilde{u}$ et de la définition des a_k, on a

$$\langle \tilde{u}, h \rangle = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(g(x_k) - g(x_{k-1}) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| g(x_k) - g(x_{k-1}) \right|$$

et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{m} \left| g(x_k) - g(x_{k-1}) \right| \leq \|\tilde{u}\| \, \|h\|_\infty \leq \|\tilde{u}\|.$$

On a donc

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left| g(x_k) - g(x_{k-1}) \right| ; \sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq m} \in S \right\}$$

$$\leq \|\tilde{u}\| < \infty,$$

ce qui montre que g est à variations bornées.

4) Etant donné que g est une fonction à variations bornées, on sait que pour tout $f \in C([0,1])$, l'intégrale de Stieltjes $\int_0^1 f(x)\, dg(x)$ existe. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour

toute subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq m}$ vérifiant $\Delta(\sigma) \leq \eta$ on a

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big) - \int_0^1 f(x)\,dg(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (19)$$

Par ailleurs, en utilisant la linéarité de $\tilde{u}$ et la définition de la fonction g, on peut facilement montrer que

$$\langle \tilde{u}, f_1 \rangle = \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big), \quad (20)$$

où

$$f_1 = \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})\big(\chi_{x_k} - \chi_{x_{k-1}}\big). \quad (21)$$

5) Etant donné que f est uniformément continue sur l'intervalle compact $[0,1]$, quitte à prendre η suffisamment petit on a

$$\|f_1 - f\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (22)$$

Il résulte alors de (19), (20), (22) et de l'inégalité triangulaire que

$$\left| \langle u, f \rangle - \int_0^1 f(x)\,dg(x) \right| \leq \left| \langle \tilde{u}, f - f_1 \rangle \right|$$
$$+ \left| \langle \tilde{u}, f_1 \rangle - \int_0^1 f(x)\,dg(x) \right|$$
$$\leq \left(\|\tilde{u}\| + 1 \right) \varepsilon.$$

Finalement, étant donné $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on déduit de la dernière inégalité que

$$\langle u, f \rangle = \int_0^1 f(x)\, dg(x).$$

<u>Exercice 4</u> Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$, montrons que l'adhérence de la sphère unité $S = \{x \in E ; \|x\| = 1\}$ au sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$ est la boule unité $B = \{x \in E ; \|x\| \leq 1\}$. Etant donné que B est un convexe fermé au sens de la topologie forte B est également fermé au sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$. L'adhérence de S au sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$ est donc contenue dans B. Montrons que cette inclusion est une égalité. Désignons par x_0 un élément arbitraire de B, il suffit de prouver que tout voisinage de x_0 rencontre S. Etant donné que les ensembles de la forme $\{x \in E ; \max_{1 \leq k \leq n} |\langle f_k, x - x_0 \rangle| < \varepsilon\}$ (où $\varepsilon > 0$ est un réel arbitraire, $n \geq 1$ est un entier arbitraire et $f_1, \ldots, f_n \in E'$ sont arbitraires) constituent une base de voisinage de x_0, il suffit de prouver que chacun de ces ensembles rencontre S. Etant donné que E est un espace vectoriel de dimension infinie, $\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k$ est également un espace vectoriel de

de dimension infini et cela entraîne évidemment qu'il existe $y_0 \in E$ vérifiant $y_0 \neq 0$ et pour tout $k = 1, \dots, m$ $f_k(y_0) = 0$. Désignons maintenant $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ l'application définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ par $h(\lambda) = \|x_0 + \lambda y_0\|$. h est une application continue comme composée d'applications continues. On a de plus $h(0) = \|x_0\| < 1$ et $\lim_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = +\infty$. Il résulte donc du Théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $h(\lambda_0) = \|x_0 + \lambda_0 y_0\| = 1$. $x_0 + \lambda_0 y_0$ est donc un élément de la sphère unité qui appartient à

$$\left\{ x \in E ; \max_{1 \leq k \leq m} |\langle f_k, x - x_0 \rangle| < \varepsilon \right\}.$$