Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen d'Analyse Fonctionnelle Appliquée
19 Décembre 2007 (durée 3 heures)

Seules les notes manuscrites sont autorisées. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 Désignons par X et Y deux espaces localement convexes métrisables munis respectivement des suites croissantes de semi-normes $(\mathcal{P}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\mathcal{Q}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Soit $K \subset X$ un sous-ensemble convexe et compact et soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de X dans Y vérifiant la propriété suivante : il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in K$ on a $\sup\{\mathcal{Q}_{k_0}(L_i(x)) : i \in I\} < +\infty$. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\sup\{\mathcal{Q}_{k_0}(L_i(x)) : i \in I,\, x \in K\} < +\infty$.
1) Posons $F = \{y \in Y : \mathcal{Q}_{k_0}(y) \leq 1\}$ et $E = \bigcap_{i\in I} L_i^{-1}(F)$. Montrer que E est un fermé de X.
2) Montrer que $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(K \cap nE)$ où $nE = \{nx : x \in E\}$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in K$, $j_0 \in \mathbb{N}$ et un réel $\eta_0 > 0$ tels que $\{x \in K : \mathcal{P}_{j_0}(x - x_0) < \eta_0\} \subset K \cap n_0E$.
3) Montrer que $\sup_{x\in K} \mathcal{P}_{j_0}(x - x_0) < +\infty$ et en déduire qu'il existe un réel $\alpha_0 > 1$ tel que $K \subset \{x \in X : \mathcal{P}_{j_0}(x - x_0) \leq \alpha_0\eta_0/2\}$.
4) Désignons par x un élément arbitraire de K et posons $z = x_0 + \alpha_0^{-1}(x - x_0)$. Montrer que $\mathcal{P}_{j_0}(z - x_0) \leq \eta_0/2$ et en déduire que $z \in n_0E$.
5) Montrer que pour tout $i \in I$ on a $L_i(x) \in n_0\alpha_0F + n_0(\alpha_0 - 1)F$, où $n_0\alpha_0F + n_0(\alpha_0 - 1)F = \{n_0\alpha_0u + n_0(\alpha_0 - 1)v : u \in F \text{ et } v \in F\}$ et conclure.

Exercice 2 On désigne par $\mathcal{C} = \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ l'espace de Banach des fonctions continues à valeurs complexes définies sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Rappelons que cet espace est muni de la norme uniforme (notée ici par $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$) définie pour tout $f \in \mathcal{C}$ par $\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup\{|f(x)| : x \in [-\pi, \pi]\}$. On note par $l^1 = l^1(\mathbb{Z})$ l'espace de Banach des suites $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ à valeurs complexes vérifiant $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < +\infty$. Rappelons que cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_{l^1}$ définie pour tout $\alpha \in l^1$ par $\|\alpha\|_{l^1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|$. Pour tout $f \in \mathcal{C}$ nous désignons $c(f) = (c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de f. Rappelons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f)$ est défini par $c_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$.
1) Pour tout $E \subset \mathbb{Z}$ on note par $\mathcal{C}_E$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ défini par $\mathcal{C}_E = \{f \in \mathcal{C} : \forall k \notin E,\, c_k(f) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{C}_E$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ est un espace de Banach.
2) On dit que $E \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble de Sidon si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{C}_E$ la suite $c(f)$ des coefficients de Fourier de f appartient à l^1. Montrer que lorsque $E \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble de Sidon alors il existe une constante $M > 0$ (qui ne dépend pas de f) telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_E$ on a $\|c(f)\|_{l^1} \leq M\|f\|_{\mathcal{C}}$. *Indication : on pourra utiliser la suite $(L^{[K]})_{K\in\mathbb{N}}$ des applications linéaires de $\mathcal{C}_E$ dans l^1 définies pour tout $K \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_E$ par $L^{[K]}(f) = (L_k^{[K]}(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ où $(L_k^{[K]}(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ est la suite telle que $L_k^{[K]}(f) = c_k(f)$ lorsque $|k| \leq K$ et $L_k^{[K]}(f) = 0$ sinon.*

Exercice 3 1) V désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Supposons que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont deux normes sur V vérifiant les deux propriétés suivantes :
(a) $(V, \mathcal{N}_1)$, c'est-à-dire V muni de la norme $\mathcal{N}_1$, et $(V, \mathcal{N}_2)$ sont des espaces de Banach.
(b) Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in V$ on a $\mathcal{N}_1(x) \leq M\mathcal{N}_2(x)$.
Montrer qu'alors il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout $x \in V$ on a $\mathcal{N}_2(x) \leq m\mathcal{N}_1(x)$.

2) Soit $\mathcal{C}[0,1]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs complexes. Pour tout réel $p \in [1,+\infty[$ nous désignons par $\|\cdot\|_p$ la norme sur $\mathcal{C}[0,1]$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}[0,1]$ par $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$. Nous désignons par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}[0,1]$ i.e. la norme définie pour tout $f \in \mathcal{C}[0,1]$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On rappelle que $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Au moyen d'un raisonnement par l'absurde montrer que pour tout réel $p \in [0,+\infty[$, $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_p)$ n'est pas un espace de Banach. *Indication : on pourra utiliser la question 1) et la suite de fonctions* $(f_n^{[p]})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de* $\mathcal{C}[0,1]$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in [0,1]$ *par* $f_n^{[p]}(x) = \begin{cases} (n - \frac{n^2 x}{2})^{1/p} & \text{lorsque } 0 \le x < 2/n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3) Supposons que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}[0,1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(c) $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
(d) Pour tout $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Lorsqu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}[0,1]$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$. On a alors pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
Montrer qu'il existe deux constantes $0 < c_1 \le c_2$ telles que pour tout $f \in \mathcal{C}[0,1]$ on a $c_1\|f\|_\infty \le \|f\| \le c_2\|f\|_\infty$.

Exercice 4 Nous désignons par Ψ une ondelette, c'est-à-dire une fonction Lebesgue mesurable définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(a) Ψ est bien localisée. Plus précisément, il existe une constante $M > 0$ telle que pour (Lebesgue) presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\Psi(x)| \le M(1+|x|)^{-3}$.
(b) Le premier moment de Ψ est nul. Plus précisément, on a $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)\,dx = 0$ où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
1-1) Montrer que $\widehat{\Psi}$ la transformée de Fourier de Ψ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie $c_\Psi = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-1}|\widehat{\Psi}(\xi)|^2\,d\xi < +\infty$.
1-2) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^*$ on a $c_\Psi = \int_{\mathbb{R}} |v|^{-1}|\widehat{\Psi}(uv)|^2\,dv$.
2-1) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et tout $h \in L^2(\mathbb{R})$ posons $(Th)(a,b) = \langle h, \Psi^{a,b}\rangle$, où $\Psi^{a,b}$ est la fonction définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par $\Psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ et où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $L^2(\mathbb{R})$. Rappelons que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Supposons que $a \in \mathbb{R}^*$ et $h \in L^2(\mathbb{R})$ sont arbitraires et fixés et désignons par $\Phi_{h,a}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, Lebesgue mesurable, définie pour tout $b \in \mathbb{R}$ par $\Phi_{h,a}(b) = (Th)(a,b)$. Montrer que $\Phi_{h,a}$ peut s'écrire comme un produit de convolution, puis que $\Phi_{h,a} \in L^2(\mathbb{R})$ et que sa transformée de Fourier vaut $|a|^{1/2}\widehat{h}(\xi)\overline{\widehat{\Psi}(a\xi)}$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.
2-2) Montrer que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on a $\int\int_{\mathbb{R}^2} |(Tf)(a,b)(Tg)(a,b)|\,\frac{dadb}{a^2} < +\infty$. *Indication: On pourra utiliser l'inégalité* $\alpha\beta \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ *pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.
2-3) Montrer que pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\int\int_{\mathbb{R}^2} (Tf)(a,b)\overline{(Tg)(a,b)}\,\frac{dadb}{a^2} = c_\Psi\langle f, g\rangle$.

Correction succinte de l'examen d'Analyse Fonctionnelle Appliquée du 19 Décembre 2007

Exercice 1 X et Y désignent deux espaces localement convexes métrisables munis respectivement des suites croissantes de semi-normes $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$. $K\subset X$ est un sous-ensemble compact et convexe. $(L_i)_{i\in I}$ est une famille d'applications linéaires continues de X dans Y vérifiant la propriété suivante: il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $x\in K$

$$\sup\{Q_{k_0}(L_i(x)) : i\in I\}<+\infty \quad (1)$$

1) Posons

$$F=\{y\in Y : Q_{k_0}(y)\leq 1\} \text{ et } E=\bigcap_{i\in I} L_i^{-1}(F) \quad (2)$$

D'après le cours, on sait que les semi-normes associées à un espace localement convexe métrisable sont des fonctions continues sur cet espace. On a de plus $F=Q_{k_0}^{-1}(]-\infty,1])$. F est donc un fermé de Y. Pour tout $i\in I$, il résulte de la continuité de L_i que $L_i^{-1}(F)$ est un fermé de X. Ainsi E est un fermé de X comme intersection de fermés.

2) Montrons que $K=\bigcup_{m=1}^{+\infty}(K\cap mE)$. Il suffit en fait de prouver que pour tout $x\in K$ il existe $m_1\in\mathbb{N}^*$ tel que $x\in m_1E$. Il résulte de (1), que pour tout $x\in K$, il existe $m_1\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i\in I$, $L_i(x)\in m_1F=\{y\in Y : Q_{k_0}(y)\leq m_1\}$. Ainsi,

on a pour tout $i \in I$, $x \in m_1 L_i^{-1}(F)$ i.e
$x \in m_1\left(\bigcap_{i\in I} L_i^{-1}(F)\right) = m_1 E$.

2) K est un sous-espace métrique complet de X car K est un sous-espace compact de X. De plus pour tout $n \geq 1$, $K \cap nE$ est un fermé de K car nE est un fermé de X. Comme $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(K \cap nE)$, il résulte du Théorème de Baire qu'il existe n_0 tel que $K \cap n_0 E$ soit d'intérieur non vide dans K. $K \cap n_0 E$ contient donc un ensemble non vide de la forme $K \cap U$ où U est un ouvert de X. Ainsi d'après les propriétés des espaces localement convexes métrisables pour tout $x_0 \in U$ (et en particulier pour tout $x_0 \in K \cap U$) il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ et un réel $\eta_0 > 0$ tels que $\{x \in X : \rho_{j_0}(x - x_0) < \eta_0\} \subset U$. Cela entraîne que $\{x \in K : \rho_{j_0}(x - x_0) < \eta_0\} \subset K \cap U \subset K \cap n_0 E$.

3) L'application $x \mapsto \rho_{j_0}(x - x_0)$ est continue sur X comme composée de $x \mapsto x - x_0$ et de $z \mapsto \rho_{j_0}(z)$. Cette application est donc continue sur le compact K. Cela prouve que $\sup_{x\in K} \rho_{j_0}(x - x_0) < +\infty$.

Posons par exemple $\varphi_0 = \dfrac{2\left(1 + \sup_{x\in K} \rho_{j_0}(x - x_0)\right)}{\min\{1, \eta_0\}}$.

Il est clair que $\varphi_0 > 1$ et que $\dfrac{\varphi_0 \eta_0}{2} \geq \sup_{x\in K} \rho_{j_0}(x - x_0)$.

4) Désignons par [redacted] x un élément arbitraire de K. D'après la question 3) on sait que x vérifie $\rho_{j_0}(\varphi_0^{-1}(x-x_0)) \leq \eta_0/2$. [redacted] Ainsi $z = x_0 + \varphi_0^{-1}(x-x_0)$ vérifie $\rho_{j_0}(z-x_0) \leq \eta_0/2 < \eta_0$. Par ailleurs z appartient à K car z s'écrit comme une combinaison convexe de x et x_0 qui appartiennent tous les deux à K. On a en effet $z = (1-\varphi_0^{-1})x_0 + \varphi_0^{-1}x$. Il résulte donc de la question 2) que $z \in m_0 E$.

5) Comme $z \in m_0 E$, pour tout $i \in I$ $L_i(z) \in m_0 F$.
Comme $x_0 \in m_0 E$, pour tout $i \in I$ $L_i(x_0) \in m_0 F$.
Notons de plus que l'on a $x = \varphi_0 z - (\varphi_0 - 1)x_0$.
Ainsi on trouve que pour tout $i \in I$, $L_i(x)$
$= \varphi_0 L_i(z) - (\varphi_0 - 1) L_i(x_0) \in m_0\varphi_0 F + m_0(\varphi_0 - 1)F$.
On a par conséquent pour tout $x \in K$ et tout $i \in I$
$Q_{k_0}(L_i(x)) \leq m_0\varphi_0 + m_0(\varphi_0 - 1) = 2m_0\varphi_0 - m_0$

D'où $\sup\{Q_{k_0}(L_i(x)) : i \in I, x \in K\} < +\infty$.

<u>Exercice 2</u> 1) Il est clair que pour $k \in \mathbb{Z}$ l'application $c_k : \mathcal{C}[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto c_k(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx$ est une forme linéaire. De plus, cette forme linéaire est continue car

$$|c_k(f)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \leq 2\pi \|f\|_\infty. \quad (1)$$

On a $\mathcal{C}_E = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}\setminus E} \operatorname{Ker} c_k$. Donc $\mathcal{C}_E$ est un sous-espace <u>fermé</u> de l'espace de Banach $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}_E$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est donc un espace de

Banach.

2) Soit $E \subset \mathbb{Z}$ un ensemble de Sidon i.e. on a pour tout $f \in \mathcal{C}_E$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty \quad (2)$$

Montrons qu'il existe alors une constante $M > 0$ (qui ne dépend pas de f) telle que

$$\|c(f)\|_{\ell^1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| \leq M \|f\|_{\mathcal{C}} \quad (3)$$

Désignons par $(L^{[K]})_{K \in \mathbb{N}}$ la suite des applications linéaires de $\mathcal{C}_E$ dans ℓ^1 définies pour tout $K \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_E$ par $L^{[K]}(f) = (L^{[K]}_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$, où pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$L^{[K]}_k(f) = \begin{cases} c_k(f) & \text{si } |k| \leq K \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

Il résulte de (4) et de (1) que pour tout $f \in \mathcal{C}_E$, on a

$$\|L^{[K]}(f)\|_{\ell^1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k| \leq K} |c_k(f)| \leq 2(2K+1)\pi \|f\|_{\mathcal{C}}.$$

Cela prouve que $L^{[K]} : \mathcal{C}_E \longrightarrow \ell^1$ est continue.
De plus (2) signifie que pour tout $f \in \mathcal{C}_E$ on a

$$\sup_{K \in \mathbb{N}} \|L^{[K]}(f)\|_{\ell^1} < +\infty.$$

Il résulte alors du Théorème de Banach-Steinhaus

que la suite $(L^{[K]})_{K\in\mathbb{N}}$ est équicontinue i.e. il existe une constante $M>0$ telle que pour tout $K\in\mathbb{N}$ et tout $f\in\mathcal{C}_E$ on a

$$\|L^{[K]}(f)\|_{\ell^1} = \sum_{k\in\mathbb{Z},\,|k|\leq K} |c_k(f)| \leq M\|f\|_{\mathcal{C}},$$

ce qui prouve que (3) est vérifiée.

Exercice 3 1) Il résulte de (b) que l'identité (notée par I) est une application linéaire continue de l'espace de Banach $(V,\mathcal{N}_2)$ dans l'espace de Banach $(V,\mathcal{N}_1)$. Le Théorème de l'application inverse entraîne donc que $I^{-1}=I$ est également une application linéaire continue de $(V,\mathcal{N}_1)$ dans $(V,\mathcal{N}_2)$. Ce qui signifie qu'il existe une constante $m>0$ telle que pour tout $x\in V$ on a $\mathcal{N}_2(x)\leq m\mathcal{N}_1(x)$

2) Remarquons d'abord que pour tout $p\in[1,+\infty[$ et tout $f\in\mathcal{C}[0,1]$ on a $\|f\|_p\leq\|f\|_\infty$. Supposons maintenant qu'il existe $p_0\in[1,+\infty[$ tel que $(\mathcal{C}[0,1],\|\cdot\|_{p_0})$ soit un espace de Banach. Il résulte alors de la question 1) qu'il existe une constante $m>0$ telle que pour tout $f\in\mathcal{C}[0,1]$ on a $\|f\|_\infty\leq m\|f\|_{p_0}$. Cela entraîne que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\|f_n^{[p_0]}\|_\infty \leq m\|f_n^{[p_0]}\|_{p_0} \quad (1)$$

Mais l'inégalité (1) ne peut être vérifiée. En effet on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\|f_n^{[p_0]}\|_\infty = n^{1/p_0}$ et

$$\|f_n^{[p_0]}\|_{p_0}^{p_0} = \int_0^{2/n} \left(n - \frac{n^2}{2}x\right) dx \leq 2.$$

3) Au moyen du Théorème du graphe fermé montrons que l'identité notée par I est une application linéaire continue de l'espace de Banach $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|)$. Pour cela il suffit de montrer que le graphe de l'identité $G_I = \{(f,f) : f \in \mathcal{C}[0,1]\}$ est un fermé de $\mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1]$, muni de la norme

$$|||(g,h)||| = \max\{\|g\|_\infty, \|h\|\} \qquad (2)$$

Désignons par $\{(f_n, f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de G_I qui converge vers $(u,v) \in \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1]$ au sens de la norme $|||\cdot|||$ et montrons que $(u,v) \in G_I$ i.e $u = v$. Il résulte de (2) que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - u\|_\infty = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \|f_n - v\| = 0.$$

En utilisant alors la définition de $\|\cdot\|_\infty$ et (d) on a pour tout $x \in [0,1]$

$$\lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - u(x)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} |f_n(x) - v(x)| = 0.$$

Ce qui prouve que $u = v$. On vient en fait de montrer qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}[0,1]$ on a $\|f\| \leq c_2 \|f\|_\infty$. Comme $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|)$ et $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces de Banach il résulte de la question 1) qu'il existe $c_1 > 0$ telle que pour tout

$f \in \mathcal{C}([0,1])$ on a $\|f\|_1 \geq c_1 \|f\|_\infty$.

<u>Exercice 4</u> Notons d'abord que (a) entraîne que l'on a $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

4-1) Comme ψ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, $\hat{\psi}$ sa transformée de Fourier est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi . x} \psi(x)\, dx \quad (1)$$

Pour presque tout x, la dérivée partielle de l'intégrant par rapport à ξ, au point (ξ, x) vaut $-ix\, e^{-ix.\xi} \psi(x)$ et cette fonction est majorée en module par la fonction intégrable $|x| |\psi(x)|$. Cela montre que $\hat{\psi}$ est dérivable en tout $\xi \in \mathbb{R}$ et que sa dérivée vaut

$$\hat{\psi}'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} e^{-ix.\xi} (x\, \psi(x))\, dx.$$

De plus $\xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix.\xi} (x\, \psi(x))\, dx$ est continue sur $\mathbb{R}$, car cette fonction est la transformée de Fourier de la fonction intégrable $x \longmapsto x\, \psi(x)$. Cela prouve que $\hat{\psi}'$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que

$$c_\psi = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < +\infty. \quad (2)$$

Rappelons d'abord que

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 = 0. \quad (3)$$

Il résulte de (b) que $\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 0$. On a donc

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\hat{\psi}(\xi)}{\xi} = \hat{\psi}'(0). \quad (4)$$

(3) résulte de façon évidente de (4). Il résulte de (3) qu'il existe $\varphi > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < |\xi| \leq \varphi$ on a $|\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \leq 1$. On a donc

$$c_\psi = \int_{|\xi| \leq \varphi} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > \varphi} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{|\xi| \leq \varphi} d\xi + \varphi^{-1} \int_{|\xi| > \varphi} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq 2\varphi + \varphi^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

En effet $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ car $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

1-2) Montrons maintenant que pour tout $u \in \mathbb{R}^*$ on a

$$c_\psi = \int_{\mathbb{R}} |v|^{-1} |\hat{\psi}(uv)|^2 d\,v. \quad (5)$$

On a en posant $\xi = uv$ i.e. $v = u^{-1}\xi$,

$$\int_{\mathbb{R}} |v|^{-1} |\hat{\psi}(uv)|^2 dv = |u|^{-1} \int_{\mathbb{R}} |u^{-1}\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi = C_\psi .$$

2-1) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et tout $h \in L^2(\mathbb{R})$ posons

$$(Th)(a,b) = \langle h, \psi^{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x) \overline{\psi^{a,b}(x)} \, dx \qquad (6)$$

où $\psi^{a,b}$ est la fonction définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \qquad (7)$$

Supposons que $h \in L^2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$ sont arbitraires et fixés et désignons $\Phi_{h,a}$ la fonction Lebesgue mesurable $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$b \mapsto \Phi_{h,a}(b) = (Th)(a,b) . \qquad (8)$$

Soit $\check{\psi}^a$ la fonction de $L^2(\mathbb{R})$ définie pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ par

$$\check{\psi}^a(y) = |a|^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{-y}{a}\right)} . \qquad (9)$$

Il résulte (8), (6), (7) et (9) que pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\Phi_{h,a}(b) = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} \cdot h(x) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \check{\psi}^a(b-x) h(x) \, dx = (\check{\psi}^a * h)(b)$$

(10)

Comme $\check{\psi}^a \in L^1(\mathbb{R})$ et $h \in L^2(\mathbb{R})$ d'après le cours on sait que $\Phi_{h,a} = \check{\psi}^a * h \in L^2(\mathbb{R})$. On a d'après le cours, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\check{\psi}^a * h)(\xi) = \mathcal{F}(\check{\psi}^a)(\xi)\,\hat{h}(\xi). \quad (11)$$

Déterminons $\mathcal{F}(\check{\psi}^a)$. On a d'après (9), pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\check{\psi}^a)(\xi) = |a|^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}\,\overline{\psi\left(-\frac{y}{a}\right)}\,dy$$

et en posant $x = -\frac{y}{a}$, on obtient

$$\mathcal{F}(\check{\psi}^a)(\xi) = |a|^{1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ia\xi y}\,\overline{\psi(y)}\,dy$$

$$= |a|^{1/2}\,\overline{\hat{\psi}(a\xi)}. \quad (12)$$

Finalement, il résulte de (10), (11) et (12) que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{\Phi}_{h,a}(\xi) = |a|^{1/2}\,\overline{\hat{\psi}(a\xi)}\,\hat{h}(\xi). \quad (13)$$

2-2) Montrons que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |(Tf)(a,b)(Tg)(a,b)|\,\frac{da\,db}{a^2} < +\infty. \quad (14)$$

En utilisant l'inégalité pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$, (8), le fait que $\int_{\mathbb{R}} |h(b)|^2\,db = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\xi)|^2\,d\xi$ pour tout

$f \in L^2(\mathbb{R})$ et (13) on obtient pour tout $a \in \mathbb{R}^*$

$$\int_{\mathbb{R}} |(Tf)(a,b)\,(Tg)(a,b)|\,db = \int_{\mathbb{R}} |\Phi_{f,a}(b)\,\Phi_{g,a}(b)|\,db$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{\int_{\mathbb{R}} |\Phi_{f,a}(b)|^2\,db + \int_{\mathbb{R}} |\Phi_{g,a}(b)|^2\,db\right\}$$

$$= \frac{|a|}{4\pi}\left\{\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(a\xi)|^2\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(a\xi)|^2\,|\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi\right\} \quad (15)$$

Il résulte de (15) et du Théorème de Tonelli que pour prouver que (14) est vérifiée il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(a\xi)|^2\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)\frac{da}{|a|} < +\infty \quad (16)$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(a\xi)|^2\,|\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi\right)\frac{da}{|a|} < +\infty. \quad (17)$$

Il résulte du Théorème de Tonelli et de (5) que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(a\xi)|^2\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)\frac{da}{|a|}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\varphi}(\xi a)|^2}{|a|}\,da\right)d\xi$$

$$= c_\psi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty .$$

De même on peut montrer que (17) est vérifiée.

2-3) Montrons que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (Tf)(a,b)\overline{(Tg)(a,b)} \frac{da\,db}{a^2} = c_\psi \langle f, g \rangle . \qquad (18)$$

Grâce à la question 2-2) on peut appliquer le Théorème de Fubini et il résulte de ce théorème que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (Tf)(a,b)\overline{(Tg)(a,b)} \frac{da\,db}{a^2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (Tf)(a,b)\overline{(Tg)(a,b)} \, db \right) \frac{da}{a^2} . \qquad (19)$$

En utilisant (8) et le fait que pour tous $h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R})$ on a $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{h}_1(\xi)\overline{\hat{h}_2(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} h_1(b)\overline{h_2(b)}\,db$ et (13), on obtient pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} (Tf)(a,b)\overline{(Tg)(a,b)}\,db = \int_{\mathbb{R}} \Phi_{f,a}(b)\overline{\Phi_{g,a}(b)}\,db$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}_{f,a}(\xi)\overline{\hat{\Phi}_{g,a}(\xi)}\,d\xi$$

$$= \frac{|a|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \, d\xi \quad . \quad (20)$$

Il résulte de (19) et (20) que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (Tf)(a,b)\overline{(Tg)(a,b)} \, \frac{da\, db}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \, d\xi \right) \frac{da}{|a|} \quad . \quad (21)$$

Nous allons de nouveau appliquer le Théorème de Fubini. Mais pour pouvoir utiliser ce théorème nous devons d'abord montrer que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|\,|\hat{g}(\xi)|\,|\hat{\psi}(a\xi)|^2 \, \frac{d\xi\, da}{|a|} < +\infty \quad . \quad (22)$$

En utilisant le Théorème de Tonelli, (5) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|\,|\hat{g}(\xi)|\,|\hat{\psi}(a\xi)|^2 \, \frac{d\xi\, da}{|a|}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,|\hat{g}(\xi)| \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi a)|^2}{|a|} \, da \right) d\xi$$

$$= C_\psi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,|\hat{g}(\xi)|\, d\xi \leq C_\psi \, \|\hat{f}\|_{L^2} \, \|\hat{g}\|_{L^2} < +\infty .$$

Enfin, il résulte de (21), du Théorème de Fubini, de (5) et

de Plancherel que $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (Tf)(a,b)\overline{(Tg)(a,b)}\,\frac{da\,db}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\left(\int_a \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|}\,da\right)d\xi$$

$$= \frac{C_\psi}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$$

$$= C_\psi \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= C_\psi \langle f, g\rangle.$$