Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen d'Analyse Fonctionnelle Appliquée
10 Janvier 2007 (durée 3 heures)

Seules les notes manuscrites sont autorisées. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 Rappelons que l'on dit qu'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé E est séparable si et seulement s'il existe un sous-ensemble dénombrable $D \subset E$ vérifiant $\overline{D} = E$, où $\overline{D}$ désigne l'adhérence de D.

Désignons par $(V, \|\cdot\|_V)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé et par $(V', \|\cdot\|_{V'})$ son dual topologique. Rappelons que pour tout $L \in V'$ on a $\|L\|_{V'} = \sup_{\|x\|_V \leq 1} |\langle L, x\rangle|$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'une condition suffisante pour que $(V, \|\cdot\|_V)$ soit séparable est que $(V', \|\cdot\|_{V'})$ le soit. Désormais, on suppose que V' est séparable et on désigne par $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V' qui est dense dans cet espace.

1) Montrer qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\|_V = 1$ et $|\langle L_n, x_n\rangle| \geq \frac{\|L_n\|_{V'}}{2}$.

2) Soit $L \in V'$ une forme linéaire vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle L, x_n\rangle = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|L_n - L\|_{V'} \geq \frac{\|L_n\|_{V'}}{2}$.

3) Montrer qu'il existe une sous-suite $k \mapsto n_k$ vérifiant $\lim_{k\to\infty} \|L_{n_k} - L\|_{V'} = 0$ et $\lim_{k\to\infty} \|L_{n_k}\|_{V'} = \|L\|_{V'}$.

4) Montrer que pour tout $v \in V$ on a $\langle L, v\rangle = 0$.

5) Désignons par W le sous-espace vectoriel de V engendré par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.e. pour tout $w \in V$ on a $w \in W$ si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ tels que $w = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n x_n$. Au moyen d'un raisonnement par l'absurde prouver que $\overline{W} = V$ (on commencera par montrer que si $\overline{W}$ est strictement contenu dans V alors il existe une forme linéaire non identiquement nulle $\widetilde{L} \in V'$ vérifiant $\langle \widetilde{L}, w\rangle = 0$ pour tout $w \in W$.

6) En utilisant la question 5) montrer que V est séparable.

Exercice 2 On désigne par dt la mesure de Lebesgue et par p et q deux réels vérifiant $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ on désigne par $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive Lebesgue mesurable vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ on a $\int_{\mathbb{R}} (g(t))^q \mathbb{1}_K(t)\, dt < \infty$.

(ii) Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}, dt)$ on a $\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)|\, dt < \infty$.

1) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $f \in L^p(\mathbb{R}, dt)$ posons $T_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\, dt$. Montrer que T_n est une forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R}, dt)$.

2) Montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}, dt)$ on a $\lim_{n\to\infty} T_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, dt$.

3) Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}, dt)$ posons $T(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, dt$. En utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus montrer que T est une forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R}, dt)$.

4) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$ posons $f_n(t) = (g(t))^{q-1} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$. Montrer que $f_n \in L^p(\mathbb{R}, dt)$ et que

$$T(f_n) \leq \|T\| \left(\int_{\mathbb{R}} (g(t))^q \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\, dt \right)^{1/p}.$$

5) En utilisant la question précédente, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (g(t))^q \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\, dt\right)^{1/q} \leq \|T\|$$

et en déduire que $g \in L^q(\mathbb{R}, dt)$.

Problème (l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$)

1) On note par $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ vérifiant la propriété suivante: pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $c_m > 0$ et $q_m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f^{(m)}(x)| \leq c_m(1+|x|)^{q_m}$, où $f^{(m)}$ désigne la dérivée d'ordre m de f (avec la convention que $f^{(0)} = f$).

a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ et tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ la fonction $f\varphi : x \mapsto f(x)\varphi(x)$ appartient à $S(\mathbb{R})$.

b) Pour tout $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ et tout $u \in S'(\mathbb{R})$ on désigne par fu la forme linéaire sur $S(\mathbb{R})$ définie par $\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Montrer que fu est une distribution tempérée.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons par g_n la fonction définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par $g_n(\xi) = (i\xi)^n$. Montrer que $g_n \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. Au moyen d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in S'(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(u^{(n)}) = g_n\mathcal{F}(u)$, où $\mathcal{F}(\cdot)$ désigne la transformée de Fourier et $u^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de u (avec la convention que $u^{(0)} = u$).

2) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, notons par h_s la fonction définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par $h_s(\xi) = (1+\xi^2)^{s/2}$ (on admet que $h_s \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$). On dit qu'une distribution tempérée u appartient à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ si et seulement si $h_s\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$ (rappelons que l'on dit, par abus de langage, qu'une distribution tempérée v appartient à $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une unique fonction ψ_v appartenant à $L^2(\mathbb{R})$, telle que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on a $\langle v, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_v(x)\varphi(x)\, dx$; rappelons aussi que la distribution tempérée v est identifiée avec la fonction ψ_v).

a) Pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$, on pose $\|u\|_{H^s} = \|h_s\mathcal{F}(u)\|_{L^2}$, où $\|\cdot\|_{L^2}$ désigne la norme habituelle sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $(H^s(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H^s})$ est un espace vectoriel normé.

b) Soient s_1 et s_2 deux réels vérifiant $s_1 \leq s_2$ montrer que $H^{s_2}(\mathbb{R}) \subset H^{s_1}(\mathbb{R})$.

c) En utilisant la question 1)c), montrer que lorsque $s \geq 0$ tout $u \in H^s(\mathbb{R})$ vérifie la propriété suivante : pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq s$, on a $u^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser le fait que pour tous $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ et $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\Phi)(\xi)\Psi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi)\mathcal{F}^{-1}(\Psi)(\xi)\, d\xi$ (on ne vous demande pas d'établir cette dernière égalité)).

3) Désignons par I_s l'application de $H^s(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ définie pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$ par $I_s(u) = h_s\mathcal{F}(u)$.

a) Montrer que I_s est une application linéaire bijective et déterminer la bijection réciproque I_s^{-1}.

b) Montrer que I_s est une isométrie i.e. pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$, on a $\|u\|_{H^s} = \|I_s(u)\|_{L^2}$.

c) En utilisant les questions 3)a) et 3)b) montrer que $H^s(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

M2 Recherche Maths appliquées.
Correction succinte de l'examen
d'AFA du 10 Janvier 2007.

<u>Exercice 1</u> 1) Supposons d'abord que $L_n \neq 0$. On a alors $\sup_{\|x\|_V \leq 1} |\langle L_n, x\rangle| = \|L_n\|_{V'} > \frac{\|L_n\|_{V'}}{2}$. Il existe donc $\tilde{x}_n \in V$ vérifiant $\|\tilde{x}_n\|_V \leq 1$ et $|\langle L_n, \tilde{x}_n\rangle| \geq \frac{\|L_n\|_{V'}}{2}$. On prendra $x_n = \|\tilde{x}_n\|_V^{-1}\tilde{x}_n$. Lorsque $L_n = 0$, x_n sera un élément arbitraire de V dont la norme vaut 1.

2) En utilisant le fait que $\|L_n - L\|_{V'} \geq |\langle L_n - L, x_n\rangle|$, le fait que $\langle L, x_n\rangle = 0$ et la question 1), on obtient

$$\|L_n - L\|_{V'} \geq |\langle L_n, x_n\rangle - \langle L, x_n\rangle| = |\langle L_n, x_n\rangle| \geq \frac{\|L_n\|_{V'}}{2}.$$

3) Posons $D' = \{L_0, L_1, \dots\}$. On a $L \in \overline{D'}$ car D' est dense dans V'. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D' \cap B_o(L, (k+1)^{-1}) \neq \emptyset$ où $B_o(L, (k+1)^{-1})$ désigne la boule ouverte de centre L et de rayon $(k+1)^{-1}$. Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m_k \in \mathbb{N}$ tel que $\|L - L_{m_k}\|_{V'} < (k+1)^{-1}$. Il résulte de cette dernière inégalité que $\lim_{k\to\infty} \|L - L_{m_k}\|_{V'} = 0$. Enfin, en utilisant l'inégalité $\|L - L_{m_k}\|_{V'} \geq \big|\|L\|_{V'} - \|L_{m_k}\|_{V'}\big|$, on obtient $\lim_{k\to\infty} \|L_{m_k}\|_{V'} = \|L\|_{V'}$.

4) Il résulte de la question 2) que $\lim_{k\to\infty} \|L_{m_k}\|_{V'} = 0$. On a alors en utilisant la question 3) que $\|L\|_{V'} = 0$, ce

qui signifie que pour tout $v \in V$, on a $\langle L, v \rangle = 0$.

5) Supposons que $\overline{W}$ est strictement contenu dans V. Il existe alors $x_0 \in V$, tel que $\mathrm{dist}(x_0, \overline{W}) = \inf\{\|x_0 - y\| / y \in \overline{W}\} > 0$. On a vu en cours qu'on peut alors construire $\tilde{L}$ une forme linéaire continue sur V, vérifiant $\langle \tilde{L}, x_0 \rangle = \mathrm{dist}(x_0, \overline{W})$, $\|\tilde{L}\|_{V'} = 1$ et pour tout $w \in \overline{W}$, $\langle \tilde{L}, w \rangle = 0$. Mais cela contredit 4).

6) Soit $\mathbb{Q}[i] = \{p + qi ; p \in \mathbb{Q} \text{ et } q \in \mathbb{Q}\}$. Il est clair que $\mathbb{Q}[i]$ est dense dans $\mathbb{C}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soient

$$W_N = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \lambda_n x_n \Big/ \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C} \right\} \text{ et}$$

$$D_N = \left\{ \sum_{n=0}^{N} r_n x_n \Big/ r_0, r_1, \dots, r_N \in \mathbb{Q}[i] \right\}.$$ D_N est dense dans W_N et D_N est dénombrable. Enfin, soit

$D = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} D_N$. D est un ensemble dénombrable car D s'écrit comme une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. De plus, D est dense dans W car $W = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} W_N$.

<u>Exercice 2</u> 1) T_n est bien définie, en effet il résulte de (ii) que $\int_{\mathbb{R}} |f(t) g(t)| \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\, dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) g(t)|\, dt \overset{(ii)}{<} \infty$, ~~Il est clair que T_n~~ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}, dt)$. Il est clair que T_n est une forme linéaire. On a de plus en utilisant l'inégalité de Hölder, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}, dt)$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt\right| \leq \|g\mathbb{1}_{[-n,n]}\|_{L^q}\|f\|_{L^p} < \infty,$$

ce qui prouve la continuité de T_n.

2) On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} f(t)g(t)\mathbb{1}_{[-n,n]}(t) = f(t)g(t)$. De plus on a pour tout $n\geq 1$ et tout $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)g(t)\mathbb{1}_{[-n,n]}(t)| \leq |f(t)g(t)|$ et on sait d'après (ii) que $|fg|\in L^1(\mathbb{R})$. Il résulte donc du Théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\,dt$.

3) Il résulte de la question 2) que pour tout $f\in L^p(\mathbb{R},dt)$, on a $\sup_{n\geq 1}|T_n(f)| < \infty$. On peut donc appliquer le Théorème de Banach-Steinhaus et d'après ce théorème, on sait que la suite des formes linéaires T_n est équicontinue i.e. il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $n\geq 1$ et $f\in L^p(\mathbb{R},dt)$, on a $|T_n(f)|\leq C\|f\|_{L^p}$. En passant à la limite, on obtient $|T(f)|\leq C\|f\|_{L^p}$, ce qui prouve la continuité de T.

4) L'égalité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ entraîne que $p(q-1)=q$. On a donc en utilisant (ii), $\int_{\mathbb{R}}(f_n(t))^p\,dt = \int_{\mathbb{R}}(g(t))^{p(q-1)}\mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt$

$$= \int_{\mathbb{R}}(g(t))^q\,\mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt < \infty.$$

De plus en utilisant le fait que $\|f_n\|_{L^p}$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} (g(t))^{p(q-1)} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} (g(t))^{q} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt\right)^{1/p},$$

on obtient

$$T(f_n) \leq \|T\| \left(\int_{\mathbb{R}} (g(t))^{q} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt\right)^{1/p}. \qquad (*)$$

5) On peut supposer, sans perte de généralité, que pour tout $n \geq 1$, on a $\int_{\mathbb{R}} (g(t))^{q} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt > 0$. En utilisant la définition de T et celle de f_n, on a $T(f_n) = \int_{\mathbb{R}} (g(t))^{q} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt$. Il résulte donc $(*)$ et de l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ que pour tout $n \geq 1$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (g(t))^{q} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\,dt\right)^{1/q} \leq \|T\| \qquad (**)$$

Finalement en utilisant le Théorème de convergence monotone on a $\int_{\mathbb{R}} (g(t))^{q}\,dt \leq \|T\|^{q} < +\infty$.

<u>Problème (l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$)</u>

1) a) La fonction $f\varphi$ est de classe C^∞ comme le produit de deux fonctions de classe C^∞. Pour montrer que $f\varphi \in S(\mathbb{R})$, il suffit de prouver que pour tout $u \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^{u} (f\varphi)^{(v)}(x) \right| < \infty$.

En utilisant la formule de Leibniz, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f\varphi)^{(v)}(x) = \sum_{m=0}^{v} \binom{v}{m} f^{(m)}(x)\, \varphi^{(m-v)}(x).$$

Il résulte de cette égalité et de l'inégalité $|f^{(m)}(x)| \leq c_m (1+|x|)^{q_m}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x^u (f\varphi)^{(v)}(x)| \leq \sum_{m=0}^{v} c_m \binom{v}{m} (1+|x|)^{q_m+u} |\varphi^{(m-v)}(x)|.$$

De plus, comme $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on a pour tout $m = 1, \dots, v$ $\sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|)^{q_m+u} |\varphi^{(m-v)}(x)| < +\infty$. On en déduit que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^u (f\varphi)^{(v)}(x)| < +\infty.$$

b) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et $\tilde{\varphi} \in S(\mathbb{R})$ posons

$$\mathcal{N}_\ell(\tilde{\varphi}) = \sum_{u=0}^{\ell} \sum_{v=0}^{\ell} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^u \tilde{\varphi}^{(v)}(x)|. \quad (\mathrm{I})$$

En raisonnant comme dans la question précédente, on peut montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe une constante $a_\ell > 0$ telle que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ on a

$$\mathcal{N}_\ell(f\varphi) \leq a_\ell \mathcal{N}_{\ell+q_*}(\varphi), \quad (\mathrm{II})$$

où $q_* = \max_{0 \leq m \leq \ell} q_m$. Par ailleurs, comme H est une distribution tempérée, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $b > 0$ une constante tels que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on a

$$|\langle \xi u, \varphi\rangle| = |\langle u, \xi\varphi\rangle| \leq b\, \mathcal{N}_p(\xi\varphi). \quad (\mathrm{III})$$

Il résulte de (II) et de (III) que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ on a $|\langle \xi u, \varphi\rangle| \leq a_p b\, \mathcal{N}_{p+q_*}(\varphi)$. Ce qui prouve que $\xi u \in S'(\mathbb{R})$.

c) Pour tout $0 \leq m \leq n$, on a $g_m^{(m)}(\xi) = i^m \prod_{\ell=0}^{m-1} (n-\ell)\, \xi^{n-m}$ et $g_m^{(m)} = 0$ lorsque $m \geq n+1$. Cela prouve que $g_m \in O_M(\mathbb{R})$.

On a $g_0 \equiv 1$, ce qui prouve que l'égalité $\mathcal{F}(u^{(m)}) = g_m \mathcal{F}(u)$ est vraie lorsque $m = 0$. Supposons que cette égalité est vraie au rang m et montrons qu'elle est vraie au rang $m+1$. Posons $w = u^{(m)}$. Il suffit en fait de montrer que $\mathcal{F}(w') = g_1 \mathcal{F}(w)$. On a pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$, $\langle \mathcal{F}(w'), \varphi\rangle = \langle w', \mathcal{F}(\varphi)\rangle = -\langle w, \{\mathcal{F}(\varphi)\}'\rangle$. En utilisant le fait que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)\, dx$ et en dérivant sous le signe somme, on peut montrer que $\{\mathcal{F}(\varphi)\}' = -g_1 \varphi$. Il résulte de tout ce qui précède que $\mathcal{F}(w') = g_1 \mathcal{F}(w)$.

2) a.) On a pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et tous $u_1, u_2 \in H^s(\mathbb{R})$, $h_s \mathcal{F}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 h_s \mathcal{F}(u_1) + \lambda_2 h_s \mathcal{F}(u_2)$. Ainsi en utilisant le fait que $L^2(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires, on trouve que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H^s(\mathbb{R})$. Par ailleurs, il est clair que la distribution tempérée nulle appartient à $H^s(\mathbb{R})$. Montrons maintenant que $\|\cdot\|_{H^s}$ est une norme sur $H^s(\mathbb{R})$. La seule petite difficulté est de montrer

que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$, on a $u = 0$ lorsque $\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = 0$. Supposons que $\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = 0$. Cela revient en fait à supposer que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on a

$$\langle h_s \mathcal{F}(u), \varphi \rangle = 0 \quad . \quad (\mathrm{IV})$$

En posant dans (IV), $\varphi = h_{-s} \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\varphi})$ où $\tilde{\varphi} \in S(\mathbb{R})$ est arbitraire on trouve que $u = 0$.

b) Soit u une distribution tempérée vérifiant $h_{s_2} \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$ i.e. il existe $\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ on a

$$\langle h_{s_2} \mathcal{F}(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_2(\xi) \varphi(\xi) \, d\xi . \qquad (\mathrm{V})$$

Montrons que $h_{s_1} \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$, i.e. il existe $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\tilde{\varphi} \in S(\mathbb{R})$ on a

$$\langle h_{s_1} \mathcal{F}(u), \tilde{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_1(\xi) \tilde{\varphi}(\xi) \, d\xi \quad (\mathrm{VI})$$

Soit $\tilde{\varphi} \in S(\mathbb{R})$, en prenant dans (V) $\varphi = h_{s_1 - s_2} \tilde{\varphi}$, on trouve que

$$\langle h_{s_1} \mathcal{F}(u), \tilde{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} h_{s_1 - s_2}(\xi) \psi_2(\xi) \tilde{\varphi}(\xi) \, d\xi . \quad (\mathrm{VII})$$

On a de plus $\int_{\mathbb{R}} |h_{s_1 - s_2}(\xi) \psi_2(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{(s_1 - s_2)} |\psi_2(\xi)|^2 d\xi$

$\leq \int_{\mathbb{R}} |\psi_2(\xi)|^2 d\xi < \infty$, car $s_1 - s_2 \leq 0$. On peut donc prendre

$\Psi_1(\xi) = h_{s_1-s_2}(\xi)\,\Psi_2(\xi)$.

c) Supposons que $s \geq 0$ et soit u une distribution tempérée vérifiant $h_s\,\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$ i.e. il existe $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ on a

$$\langle h_s\,\mathcal{F}(u), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \Psi(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (\mathrm{VIII})$$

Montrons que pour tout entier m tel que $0 \leq m \leq s$ on a $u^{(m)} \in L^2(\mathbb{R})$ i.e. il existe $\tilde{\Psi}_m \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\tilde{\varphi} \in S(\mathbb{R})$, on a

$$\langle u^{(m)}, \tilde{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\Psi}_m(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx. \qquad (\mathrm{IX})$$

Nous commencerons par prouver que $\mathcal{F}(u^{(m)}) \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $\tilde{\tilde{\varphi}} \in S(\mathbb{R})$, en prenant dans (VIII), $\varphi = g_m \cdot h_{-s}\tilde{\tilde{\varphi}}$, et en utilisant la question 1)c) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(\xi)\,g_m(\xi)\,h_{-s}(\xi)\tilde{\tilde{\varphi}}(\xi)\,d\xi = \langle h_s\,\mathcal{F}(u), g_m\,h_{-s}\tilde{\tilde{\varphi}}\rangle$$

$$= \langle g_m\,\mathcal{F}(u), \tilde{\tilde{\varphi}}\rangle = \langle \mathcal{F}(u^{(m)}), \tilde{\tilde{\varphi}}\rangle \qquad (\mathrm{X})$$

On a de plus, en utilisant le fait que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|g_m(\xi)\,h_{-s}(\xi)| \leq 1$, $\int_{\mathbb{R}} |\Psi(\xi)\,g_m(\xi)\,h_{-s}(\xi)|^2\,d\xi$ $\leq \int_{\mathbb{R}} |\Psi(\xi)|^2\,d\xi < \infty$. On en déduit que $\mathcal{F}(u^{(m)}) \in L^2(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que $u^{(m)} \in L^2(\mathbb{R})$. Posons $\tilde{\tilde{\Psi}}_m = \Psi\,g_m\,h_{-s}$. On a en utilisant (X), pour tout $\tilde{\varphi} \in S(\mathbb{R})$,

$$\langle u^{(n)}, \tilde{\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(u^{(n)}), \tilde{\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}(u^{(n)}), \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\varphi})\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\tilde{\psi}}_n(\xi)\, \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\varphi})(\xi)\, d\xi . \qquad (\overline{XI})$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que pour tous $\lambda \in L^2(\mathbb{R})$ et $\theta \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} \lambda(\xi)\, \mathcal{F}^{-1}(\theta)(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\lambda)(\xi)\theta(\xi)\, d\xi$,

on trouve que,

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\tilde{\psi}}_n(\xi)\, \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\varphi})(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\tilde{\psi}}_n)(\xi)\, \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi . \qquad (\overline{XII})$$

Finalement, il résulte de $(\overline{XI})$ et $(\overline{XII})$, que $(\overline{IX})$ est vérifiée lorsque $\tilde{\psi}_n = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\tilde{\psi}}_n)$.

3) a) La seule difficulté est de montrer que I_s est bijective i.e. pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un unique $u \in H^s(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ on a

$$\langle h_s\, \mathcal{F}(u), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx . \qquad (\overline{XIII})$$

Soit V la distribution tempérée définie pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ par $\langle V, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$. Supposons que $(\overline{XIII})$ est vraie, on a alors pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$,

$$\langle h_s\, \mathcal{F}(u), \varphi\rangle = \langle V, \varphi\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle \mathcal{F}(u), \varphi\rangle = \langle h_{-s} V, \varphi\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle u, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(h_{-s} v), \varphi \rangle$$

On a donc nécessairement $u = \mathcal{F}^{-1}(h_{-s} v)$. Il nous reste à montrer que $\mathcal{F}^{-1}(h_{-s} v) \in H^s(\mathbb{R})$. C'est bien le cas car $h_s \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}(h_{-s} v)\right] = v \in L^2(\mathbb{R})$.

b) C'est évident, il suffit d'utiliser la définition de $\|\cdot\|_{H^s}$.

c) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $H^s(\mathbb{R})$. Il résulte de la question 3)b) que $(I_s(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. Comme $L^2(\mathbb{R})$ est complet, il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\lim_{k \to \infty} \|f - I_s(u_k)\|_{L^2} = 0. \quad (\mathrm{XIV})$$

On a de plus pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f - I_s(u_k)\|_{L^2} = \|I_s(I_s^{-1}(f) - u_k)\|_{L^2} = \|I_s^{-1}(f) - u_k\|_{H^s} \quad (\mathrm{XV})$$

Il résulte de (XIV) et (XV) que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $I_s^{-1}(f)$ dans $H^s(\mathbb{R})$.