Curriculum vitae

Table des matières

1 Etat civil et adresse

Nom patronymique : **AYACHE**
Nom marital : ——
Prénom : **Antoine**
Date et lieu de naissance : **22/09/1969 à Aley (Liban)**

Nationalité : **Franco-Libanaise**
Situation de famille : **Célibataire**

Adresse personnelle : **7, Rue Benvignat 59000 Lille FRANCE**
Numéros de téléphone : **06.81.31.63.05** et **03.20.63.29.72**
E-mail : **Antoine.Ayache@math.univ-lille1.fr**

2 Fonctions et établissement actuel

Professeur (section 26 du CNU, 2-ème classe, 5-ème échelon) **à l'Université Lille I (IAE)** depuis le 1 septembre 2004.
Laboratoire : Paul Painlevé (équipe de Probabilités et Statistique).
→ Je bénéficie d'une **Prime de Recherche et d'Encadrement Doctoral (PEDR)** depuis le 1 octobre 2004.

3 Anciennes fonctions

- Maître de Conférences à l'Université Toulouse III du 1/09/99 au 31/08/04.
Laboratoire : Statistique et Probabilités (LSP).
→ J'ai été affecté du 1/09/03 au 31/08/04 **à l'ENS Cachan** dans le cadre **d'une délégation d'un an au CNRS**.
Laboratoire : Centre de Mathématiques et de Leurs Applications (CMLA) de l'ENS Cachan.

- Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'Université Paris IX du 1/09/97 au 31/08/99.
Laboratoire : Centre de Recherche en Mathématiques de la Décision (CEREMADE).

- Collaborateur extérieur du projet Fractales de l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) **Rocquencourt,** du 1/01/99 au 31/08/99.

- Allocataire de recherche du 1/10/94 au 31/08/97.

4 Titres univesitaires

- Habilitation à Diriger des Recherches.
Titre : **Au delà du Mouvement Brownien Fractionnaire.** Date : **15 Décembre 03.** Lieu de soutenance : **Université Toulouse III Paul Sabatier.** Directeur de recherche : **Monsieur Y. Meyer.** Président : **Monsieur C. Houdré**. Rapporteurs : **Messieurs K.J. Falconer, S. Jaffard et M.A. Lifshits**. Examinateurs : **Madame A. Bonami et Monsieur M. Ledoux.**

- Doctorat en Mathématiques appliquées, (mention très honorable).
Titre : **Bases multivariées d'ondelettes, orthonormales, non séparables, à support compact et de régularité arbitraire.** Date : **3 Décembre 97.** Lieu de soutenance : **Université Paris IX Dauphine.** Directeur de thèse : **Monsieur Y. Meyer.** Président : **Monsieur P. Le Tallec**. Rapporteurs : **Madame I. Daubechies, Monsieur A. Cohen et Monsieur P.G. Lemarié-Rieusset.**

- DEA de Mathématiques pures, (mention assez bien).
Date : **Juin 94.** Lieu : **Université Paris XI Orsay.**
On devait faire valider 2 demi-AEA et un mémoire. Dans l'objectif d'avoir une double formation **en analyse** (analyse harmonique et analyse fonctionnelle) **et en algèbre** (géométrie algébrique de base), il m'a semblé préférable de faire valider 5 demi-AEA et un mémoire.

- ENSAE première division, SEA (Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique). **Admission sur titre** en 2-ième année **en Septembre 91** et **obtention du diplôme en Juin 93.**

- DEA de Statistique et modèles aléatoires en économie et en finance.
Lieu : **Université Paris VII.** J'ai préparé ce DEA parallèlement à ma thèse afin de **renforcer mes connaissances en probabilités, en statistique et leurs applications.** J'ai obtenu **3 UV sur 6 UV en Septembre 95,** elles portaient sur **le calcul stochastique et certaines méthodes d'évaluation des options en finance.**

- Maîtrise de Mathématiques pures, (mention bien).
Date : **Juin 91.** Lieu : **Université Paris VI.**
Certificats : Topologie (très bien), Analyse Fonctionnelle (très bien), Algèbre Commutative (bien) et Formes Quadratiques & groupes classiques (assez bien).

- Licence de Mathématiques appliquées, (mention bien).
Date : **Juin 90.** Lieu : **Université Paris IX.**
Certificats : Probabilités, Statistique, Informatique (le langage LISP et le langage PRO-

LOG), Automatique, Systèmes différentiels, Analyse Hilbertienne, Intégration et Espaces métriques.

- DEUG de Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales.
Date : **Juin 89.** Lieu : **Université Paris IX.**
J'ai obtenu la mention assez bien à ma 2-ième année et la mention bien à ma première année.

- Baccalauréat série C, (mention assez bien).
Date : **Juillet 87.**

5 Publications en Mathématiques avec "referee"

1) Ayache A., Jaffard S. ; Hölder exponents of arbitrary functions. *Revista Matematica Iberoamericana* à paraître.

2) Ayache A., Roueff F., Xiao Y. ; Linear Fractional Stable Sheets : Wavelet expansion and sample path properties. *Stochastic Processes and their Applications* à paraître.

3) Ayache A., Linde W. ; Approximation of Gaussian Random Fields : General Results and Optimal Wavelet Representation of the Lévy Fractional Motion. *Journal of Theoretical Probability* 21 :69-96 (2008).

4) Ayache A., Tzvetkov N. ; L^p properties for Gaussian random series. *Transactions of the American Mathematical Society* 360 :4425-4439 (2008).

5) Ayache A., Wu D., Xiao Y. ; Joint Continuity of the Local Times of Fractional Brownian Sheets. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques,* 44 :4 :727-748 (2008).

6) Ayache A., Roueff F., Xiao Y. ; Joint Continuity of the Local Times of Linear Fractional Stable Sheets. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 344 :I :635-640 (2007).

7) Ayache A., Roueff F., Xiao Y. ; Local and Asymptotic Properties of Linear Fractional Stable Sheets. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 344 :I :389-394 (2007).

8) Ayache A., Jaffard S., Taqqu M.S. ; Wavelet construction of Generalized Multifractional Processes. *Revista Matematica Iberoamericana* 23 :1 :327-370 (2007).

9) Ayache A., Bonami A., Estrade A. ; Identification and wavelet decomposition of anisotropic Gaussian fields. *Proceedings of 5th ISAAC Congress, 25-30 July 2005, University of Catania, World Scientific* à paraître.

10) Ayache A., Bertrand P., Lévy Véhel J. ; A central limit theorem for the quadratic variations of the step fractional Brownian motion. *Statistical Inference for Stochastic Processes* 10 :1 :1-27 (2007).

11) Ayache A., Heinrich P., Marsalle L., Suquet Ch. ; Holderian random functions.

Fractals in Engineering· New Trends in Theory and Applications. Springer-Verlag eds, Lévy Véhel, Lutton 33-56 (2005).

12) Ayache A., Xiao Y. ; Asymptotic Growth Properties and Hausdorff dimensions of Fractional Brownian Sheets. *Journal of Fourier Analysis and Applications* 11 :4 :407-439 (2005).

13) Ayache A., Taqqu M.S. ; Multifractional Processes with Random Exponent. *Publicaciones Matemàtiques* 49 :459-486 (2005).

14) Ayache A. ; Hausdorff dimension of the graph of the Fractional Brownian Sheet. *Revista Matematica Iberoamericana* 2 :20 :395-412 (2004).

15) Ayache A., Lévy Véhel J. ; Identification of the pointwise Hölder exponent of Generalized Multifractional Brownian Motion. *Stochastic Processes and their Applications* 111 :119-156 (2004).

16) Ayache A., Benassi A., Cohen S., Lévy Véhel J. ; Regularity and identification of Generalized Multifractional Gaussian Process. *Séminaire de Probabilités* XXXVIII :290-312 (2005).

17) Ayache A., Taqqu M.S. ; Rate optimality of wavelet series approximations of fractional Brownian motion. *Journal of Fourier Analysis and Applications* 9 :5 :451-471 (2003).

18) Ayache A., Roueff F. ; A Fourier formulation of the Frostman criterion for random graphs and its application to wavelet series. Lettre à l'éditeur *Applied and Computational Harmonic Analysis* 14 :75-82 (2003).

19) Ayache A., Léger S., Pontier M. ; Les ondelettes à la conquête du Drap Brownien Fractionnaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*. 335, I, 1063-1068 (2002).

20) Ayache A. ; The Generalized Multifractional Field : A nice tool for the study of the Generalized Multifractional Brownian Motion. *Journal of Fourier Analysis and Applications* 8 :581-601 (2002).

21) Ayache A., Léger S., Pontier M. ; Drap Brownien Fractionnaire. *Potential Analysis* 17 :31-43 (2002).

22) Ayache A. ; Du mouvement brownien fractionnaire au mouvement brownien multifractionnaire (article de synthèse). *Technique et science informatiques* 20 :9 :1133-1152 (2001).

23) Ayache A., Lévy Véhel J. ; Processus à régularité locale prescrite. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 333, I, 233-238, (2001).

24) Ayache A. ; Some methods for constructing non separable, orthonormal, compactly supported wavelet bases. Lettre à l'éditeur *Applied and Computational Harmonic Analysis* 10 :99-111 (2001).

25) Ayache A., Cohen S., Lévy Véhel J. ; The covariance structure of multifractional Brownian motion. Paru dans les actes de la conférence *ICASSP* (2000).

26) Ayache A., Lévy Véhel J. ; The Generalized Multifractional Brownian Motion. *Statistical Inference for Stochastic Processes* 3 :1-2 :7-18 (2000).

27) Ayache A. ; A geometrical solution of a problem on wavelets. *Studia Mathematica* 139 :3 :261-273 (2000).

28) Ayache A., Lévy Véhel J. ; Generalized Multifractional Brownian Motion : definition and preliminary results. *Springer, eds Dekind, Lévy Véhel, Lutton, Tricot* 17-32 (1999).

29) Ayache A. ; Construction of non separable dyadic compactly supported wavelet bases for $L^2(\mathbb{R}^2)$ of arbitrarily high regularity. *Revista Matematica Iberoamericana* 15 :1 :37-58 (1999).

30) Ayache A. ; Construction de bases d'ondelettes orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^2)$ non séparables, à support compact et de régularité arbitrairememt grande. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 325 :I :17-20, (1997).

6 Prépublications en Mathématiques

31) Ayache A., Linde W. ; Series representations of Fractional Gaussian Processes by Trigonometric and Haar systems.

32) Ayache A., Peng Q. ; Stochastic volatility and Multifractional Brownian Motion.

33) Ayache A., Bertrand P. ; A process very similar to Multifractional Brownian Motion.

7 Publications en Sciences de Gestion "avec referee"

1) Ayache A., Calciu M., Frandon M., Salerno F. ; Stochastic approach to customer Equity and Lifetime Value calculations with applications to customer retention models and some extensions. *EMAC Athens 35-th Conference* (2006).

2) Ayache A., Calciu M., Frandon M., Salerno F. ; Calculs de la valeur du client à l'aide d'une nouvelle approche stochastique et des fonctions génératrices. *22-ème Congrès de l'AFM, Nantes* (2006).

3) Ayache A., Calciu M., Frandon M., Salerno F. ; Analytic decision support to find optimal balance between customer acquisition and retention spending. *23-ème Congrès de l'AFM, Aix les Bains* (2007).

8 Activités de recherche en Mathématiques

8.1 Introduction

Il existe une frontière nette entre mes travaux de recherche durant ma thèse de doctorat (soutenue le 3 Décembre 1997) et les travaux de recherche que j'ai entrepris par la suite. En effet, à partir de 1998, je me suis surtout orienté vers l'étude de processus stochastiques de nature fractale apparentés au Mouvement Brownien Fractionnaire, à la fois d'un point de vue probabiliste et d'un point de vue statistique, alors que ma thèse de doctorat a consisté en l'étude et la construction de bases d'ondelettes multidimensionnelles, non séparables, orthonormales, à support compact et de régularité arbitrairement élevée, au moyen de méthodes d'analyse harmonique et de géométrie algébrique de base [24,27,29,30]. Signalons au passage, que dans les années qui ont suivi ma soutenance, plusieurs auteurs se sont intéressés au problème de la construction de bases d'ondelettes non séparables et ont cité [29] et [24], mes deux principaux articles sur ce sujet. Je vais maintenant décrire, de façon plus ou moins thématique, l'essentiel de mes activités de recherche à partir de 1998.

8.2 Processus Multifractionnaires, auto-similarité, et régularité de Hölder

8.2.1 Du Mouvement Brownien Multifractionnaire (MBM) au MBM Généralisé

Depuis plusieurs années le Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF) s'est avéré important en modélisation. Dans de multiples domaines, comme l'hydrologie, la géologie, le traitement du signal et des images, la finance et l'étude des télécommunications, il tend à se substituer au traditionnel Mouvement Brownien. Nous noterons le MBF par $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ parce qu'il dépend essentiellement d'un unique paramètre $H \in]0,1[$, appelé le paramètre de Hurst. Rappelons que ce processus Gaussien est continu, globalement auto-similaire d'indice H et à accroissements stationnaires. Il est bien connu que l'exposant de Hölder ponctuel [1] du MBF reste constant tout le long de sa trajectoire et vaut presque sûrement H en tout point t. Cela est restrictif, à la fois du point de vue des applications et d'un point de vue théorique. En effet, dans un grand nombre de phénomènes, on a souvent observé que la régularité de Hölder varie d'un point à un autre et que ses variations peuvent même être très erratiques. Par ailleurs, Andersson, Daoudi, Jaffard, Lévy Véhel et Meyer ont apporté une importante confirmation théorique à ces observations empiriques en montrant que la forme la plus générale de l'exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue est

$$\liminf_{n\to\infty} H_n(t), \tag{8.1}$$

1. $\{\alpha_X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ l'exposant de Hölder ponctuel d'un processus $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ à trajectoires continues et nulle part différentiables est défini pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ par

$$\alpha_X(t) = sup\Big\{\alpha \geq 0 : \limsup_{|h|\to 0} \frac{X(t+h)-X(t)}{|h|^\alpha} = 0\Big\}.$$

où $(H_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues et positives. Cependant les fonctions continues dont l'exposant de Hölder ponctuel est de la forme la plus générale, que ces auteurs ont pu construire dans le cadre déterministe, sont extrèmement particulières et ne peuvent donc servir de modèle pour une simulation réaliste. Cela a donc incité Jaffard et Lévy Véhel a posé le problème suivant.

Problème 1 *(Jaffard et Lévy Véhel) Peut-on trouver une construction probabiliste naturelle de fonctions continues dont l'exposant de Hölder ponctuel est de la forme la plus générale ? Plus précisément peut-on construire un processus Gaussien continu qui étend le MBF et dont les trajectoires admettent avec probabilité* 1 *un exposant de Hölder ponctuel de la forme (8.1) ?*

Une première brèche a été ouverte dans cette voie par l'introduction du Mouvement Brownien Multifractionnaire (MBM). Rappelons que Benassi, Jaffard, Lévy Véhel, Peltier et Roux ont construit ce processus Gaussien continu noté par $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ en substituant au paramètre de Hurst du MBF, dans sa représentation sous forme de moyenne mobile non anticipative ou encore dans sa représentation harmonisable, une fonction déterministe $H(t)$ suffisamment régulière (typiquement de classe C^1) et à valeurs dans un compact de $]0,1[$. Deux résultats importants sur le MBM sont les suivants.

(a) (Benassi, Jaffard et Roux) En chaque point t, le MBM admet, au sens fort, un MBF tangent de paramètre de Hurst $H(t)$:

$$\lim_{\rho\to 0^+} \text{loi}\left\{\frac{X(t+\rho u)-X(t)}{\rho^{H(t)}}\right\}_{u\in\mathbb{R}^N} = \text{loi}\{B_{H(t)}(u)\}_{u\in\mathbb{R}^N}. \tag{8.2}$$

Cela signifie que le MBM est localement asymptotiquement auto-similaire d'indice $H(t)$.

(b) (Benassi, Jaffard, Lévy Véhel, Peltier et Roux) $\{\alpha_{MBM}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$, l'exposant de Hölder ponctuel du MBM, vérifie pour tout $t\in\mathbb{R}^N$,

$$\mathbb{P}\{\alpha_{MBM}(t) = H(t)\} = 1. \tag{8.3}$$

On peut voir le MBM comme une extension du MBF parce qu'il se réduit à un MBF lorsque la fonction $H(t)$ est constante et parce qu'il vérifie le résultat (a). L'introduction de ce processus n'est qu'une première étape vers la résolution du Problème 1. D'une part, parce que le résultat (b) ne peut être étendu à des fonctions $H(t)$ discontinues, tout en conservant la même définition du MBM $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$, puisqu'on perd alors la continuité de ce processus. D'autre part, parce que ce résultat ne donne guère de renseignements sur l'exposant de Hölder ponctuel des trajectoires de $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$. Pour pouvoir affirmer, qu'avec probabilité 1, la fonction $H(t)$ est l'exposant de Hölder ponctuel de la trajectoire $t\mapsto X(t,\omega)$, nous avons besoin d'établir le résultat uniforme,

$$\mathbb{P}\{\forall t,\, \alpha_{MBM}(t) = H(t)\} = 1. \tag{8.4}$$

Généralement parlant, les techniques qui permettent d'obtenir des résultats du type (8.4) sont différentes de celles qui permettent d'obtenir des résultats du type (8.3).

L'un des principaux objectifs de nos travaux de recherche, dans les années qui ont suivi notre soutenance de thèse, a été de résoudre le Problème 1. En collaboration avec Lévy Véhel, nous avons introduit un processus Gaussien continu appelé Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé (MBMG) parce qu'il étend à la fois le MBM et le MBF (pour les mêmes raisons qui nous ont permis de voir le MBM comme une extension du MBF) [28,26]. Le MBMG sera noté par $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$. De façon heuristique, il est obtenu "en substituant" au paramètre de Hurst du MBF, dans sa représentation harmonisable, la suite de fonctions déterministes continues $(H_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$; signalons au passage, que dans nos travaux, pour des raisons de commodité, nous imposons à toutes ces fonctions d'être à valeurs dans $]0,1[$, mais au fond cette condition n'est pas vraiment indispensable. Le MBMG est une solution au Problème 1. En effet, comme nous allons le voir par la suite, ce processus possède un exposant de Hölder ponctuel de la forme la plus générale (voir (8.1)) et ceci constitue l'un de ses principaux avantages. Un autre avantage du MBMG est que les deux bouts de son spectre de fréquences sont gouvernés par des paramètres différents. Ainsi, contrairement au MBF, il peut à la fois être très irrégulier et posséder des propriétés de dépendance à long terme. Une telle problématique a été étudiée par Bardet et Bertrand dans le cadre du Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelle ; ce processus à accroissements stationnaires possède un exposant de Hölder constant tout le long de sa trajectoire et ressemble fortement au MBMG dont le paramètre $(H_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite finie de fonctions constantes.

Avant de clore cette sous-section, Signalons que, en s'inspirant de la méthode de construction du MBMG (voir [26,28]), Marianne Clausel a pu très récemment, dans sa thèse, construire le Mouvement Brownien Multifractionnaire Lacunaire (MBML). L'une des principales nouveautés avec le MBML est qu'il peut admettre, au sens faible (c'est-à-dire que dans (8.2), ρ est remplacé par une suite), plusieurs processus tangents (voir la thèse de Clausel).

8.2.2 Régularité de Hölder ponctuelle du MBMG

Donnons maintenant les étapes successives qui nous ont permis d'aboutir à une étude complète de la régularité de Hölder ponctuelle du MBMG.

Première étape : (en collaboration avec Lévy Véhel [28,26]) en imposant une condition de semi-continuité-inférieure uniforme à la suite $(H_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ nous avons pu montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}^N$ et tout $|h|$ assez petit, $\mathbb{E}(|Z(t+h)-Z(t)|^2)\approx |h|^{2\liminf_{n\to\infty} H_n(t)}$ et nous en avons déduit que pour tout $t\in\mathbb{R}^N$,

$$\mathbb{P}\{\alpha_{MBMG}(t)=\liminf_{n\to\infty} H_n(t)\}. \tag{8.5}$$

Deuxième étape : Afin de disposer d'un outil permettant, de façon générale, de simplifier l'étude locale du MBMG ainsi que d'autres processus Multifractionnaires, nous avons introduit dans [20] le champ Multifractionnaire Généralisé ; il est défini de façon analogue au MBMG, cependant les paramètres fonctionnels $H_n(\cdot)$ ne dépendent plus de t, mais d'une autre variable qui n'a plus rien à voir avec t. Signalons au passage que l'idée d'introduire un tel champ a été, par la suite, utilisée par Stoev et Taqqu dans le cadre des processus Multifractionnaires Stables puis, plus récemment, par Falconer et Lévy Véhel dans celui des processus Multifractionnaires Multistables. Cette idée nous avait permis dans [20] de prouver que localement, à un reste négligeable près, le MBMG est presque sûrement égal à un processus à accroissements stationnaires qui ressemble beaucoup à un MBF. Ainsi, en estimant la variance des accroissements de ce dernier processus, nous avions pu établir (voir [20]) que (8.5) reste vraie, même si la suite $(H_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie plus la condition de semi-continuité-inférieure uniforme mentionnée plus haut.

Troisième étape : (en collaboration avec Jaffard et Taqqu [8]) Pour compléter la résolution du Problème 1, il restait encore à prouver que l'exposant de Hölder ponctuel du MBMG vérifie un résultat uniforme du type (8.4). Nous avons obtenu un tel résultat, au moyen d'une méthode d'ondelettes, dans un contexte plus général et non Gaussien (voir [8]), celui du Processus Multifractionnaire Généralisé avec un Exposant Aléatoire (PMGEA). Nous reviendrons plus longuement sur cette méthode d'ondelettes dans la sous-section 8.4.1, présentons maintenant nos travaux qui concernent les Processus Multifractionnaires avec un Exposant Aléatoire.

8.2.3 Processus Multifractionnaires avec un Exposant Aléatoire

Papanicolaou et Sølna avaient déjà proposé de remplacer le paramètre fonctionnel déterministe $H(t)$ du MBM, dans l'une de ses représentations sous forme d'intégrale d'Itô (la représentation sous forme de moyenne mobile non anticipative), par un processus stochastique $\{S(t,\omega)\}$ indépendant du bruit blanc (pour que l'intégrale d'Itô reste bien définie), mais ils n'ont pas poussé plus loin leur étude. Dans un travail en collaboration avec Taqqu [13], nous avons repris cette idée naturelle, cependant pour éviter d'imposer à $\{S(t,\omega)\}$ l'hypothèse restrictive d'indépendance du bruit blanc, nous avons utilisé la représentation du MBM sous forme de série d'ondelettes. Le nouveau modèle ainsi obtenu est appelé Processus Multifractionnaire avec un Exposant Aléatoire (PMEA) parce que, contrairement au MBM, son exposant de Hölder ponctuel peut varier de façon aléatoire au cours du temps (plus précisément cet exposant est presque sûrement égal à S lorsque les trajectoires de S sont suffisamment régulières), ce qui le rend mieux adapté à certaines applications. Un autre avantage du PMEA par rapport au MBM est qu'il possède une forme d'auto-similarité globale lorsque S est un processus stationnaire indépendant du bruit blanc. Signalons aussi, qu'en s'inspirant du modèle proposé dans [13] et en utilisant certains résultats de cet article, Olivier Barrière a pu très récemment construire dans sa thèse, le Processus Multifractionnaire Auto-Régulé (PMAR). La principale nouveauté avec ce processus est que lui-même et son exposant de Hölder ponctuel sont intimement liés l'un à l'autre par une simple équation fonctionnelle déterministe, ainsi les valeurs de l'exposant de Hölder ponctuel sont directement régulées par les valeurs du processus et inversement ; une telle propriété peut être d'une importance considérable dans le cadre de certaines applications (voir la thèse de Barrière).

Cependant, l'exposant de Hölder ponctuel aléatoire du modèle proposé dans [13] varie nécessairement de façon continue au cours temps et ne peut donc être de la forme la plus générale : $\liminf_{n\to\infty} S_n(t,\omega)$, où $(S_n)_n$ est une suite arbitraire de processus dont les trajectoires sont des fonctions continues et positives. C'est pour cela que, en collaboration avec Jaffard et Taqqu, nous avons proposé dans [8] une généralisation de ce modèle que nous avons appelée PMGEA ; le PMGEA est obtenu à partir de la représentation en série d'ondelettes du MBMG, en remplaçant les fonctions déterministes $H_n(t)$ par les processus stochastiques $S_n(t,\omega)$. Signalons enfin que, comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, l'exposant de Hölder ponctuel du PMGEA vérifie le résultat uniforme :

$$\mathbb{P}\{\forall\, t, \alpha_{PMGEA}(t) = \liminf_{n\to\infty} S_n(t)\}. \tag{8.6}$$

8.2.4 Autres résultats

- Fonction de Weierstrass aléatoire généralisée : En collaboration avec Lévy Véhel nous montrons dans [23], qu'à partir de la fonction de Weierstrass, on peut construire un processus Gaussien continu et nulle part dérivable dont l'exposant de Hölder ponctuel vérifie un résultat du type (8.5).

- Exposants de Hölder et stationnarité des accroissements : Nous avons déjà indiqué que l'exposant de Hölder ponctuel d'un MBF de paramètre de Hurst H reste constant tout le long de sa trajectoire, plus précisément on a,

$$\mathbb{P}\{\forall t,\ \alpha_{MBF}(t) = H\} = 1.$$

Il est naturel de se demander dans quelle mesure cette constance de l'exposant de Hölder ponctuel dépend de propriétés spécifiques au MBF. En collaboration avec Heinrich, Marsalle et Suquet, nous donnons dans [11] un premier élément de réponse à cette question. Plus précisément, nous montrons le résultat général suivant : pour tout processus $\{\widetilde{X}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ à accroissements stationnaires, continu, nulle part différentiable et vérifiant une loi du zéro-un, il existe une constante $a \geq 0$, telle que pour tout t, on a

$$\mathbb{P}\{\alpha_{\widetilde{X}}(t) = a\} = 1. \tag{8.7}$$

Nous montrons également dans [11], que ce résultat reste vrai lorsque l'exposant de Hölder ponctuel est remplacé par l'exposant de Hölder local. L'idée de base qui a permis d'obtenir (8.7) consiste, heuristiquement parlant, à voir $\alpha_{\widetilde{X}}(t)$ comme une fonctionnelle des accroissements du processus $\widetilde{X}$. Avant de clore ce paragraphe, signalons que hormis le résultat que nous venons de donner, [11] contient également une revue de certains théorèmes limites dans des espaces de Hölder plus ou moins classiques.

- Un processus très semblable au MBM : Très récemment, en collaboration avec Bertrand, nous avons comparé dans [33], le MBM univarié $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, au processus $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ obtenu en remplaçant dans chaque coefficient $c_{j,k}(t, H(t))$ de la représentation en série d'ondelettes de $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $H(t)$ par $H(k/2^j)$. Le principal résultat de cette prépublication est que la différence de ces deux processus, autrement dit le processus $\{R(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N} = \{X(t) - Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$, possède une régularité de Hölder globale strictement plus grande que celle de $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et de $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ce résultat signifie que $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ et $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sont très semblables du point de vue de la géométrie fractale, d'ailleurs, l'une de ses conséquences est que $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie des propriétés analogues à (8.2) et (8.4).

- Caractérisation des exposants de Hölder ponctuels des fonctions localement intégrables : Comme nous l'avons déjà souligné dans la sous-section 8.2.1, la classe fonctionnelle des exposants de Hölder ponctuels des fonctions continues a été complètement caractérisée par Andersson, Daoudi, Jaffard, Lévy Véhel et Meyer ; ces auteurs ont montré que cette classe est en fait l'ensemble des fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme (8.1). Le problème de savoir si l'exposant de Hölder ponctuel d'une fonction localement intégrable discontinue peut également s'écrire sous cette forme est resté ouvert pendant ces douze dernières années. Très récemment, en collaboration avec Jaffard, nous avons résolu ce problème dans [1] ; contrairement à ce qu'on pouvait s'y attendre, l'exposant de Hölder ponctuel d'une fonction localement intégrable discontinue n'a pas une forme plus "méchante" que celui d'une fonction continue, en effet lui aussi peut s'exprimer sous la forme (8.1). La preuve de ce résultat repose essentiellement sur une reformulation du type "wavelet-leader" d'une caractérisation sympathique des espaces de Hölder ponctuels due à Andersson.

8.3 Inférence statistique pour des processus Multifractionnaires ou des champs anisotropes

8.3.1 Identification de l'exposant de Hölder ponctuel du MBMG

Il est important, à la fois du point de vue des applications et d'un point théorique de savoir si on peut identifier $\alpha_{MBMG}(t)$ l'exposant de Hölder ponctuel du MBMG en un point arbitraire t. En collaboration avec Lévy Véhel, nous avons montré dans [15] que cela est possible, sous la seule condition que la fonction $s \mapsto \alpha_{MBMG}(s)$ s'exprime comme la limite de la suite de fonctions continues $(H_n(s))_n$ (rappelons qu'on a déjà vu que cette fonction s'écrit comme la lim inf de cette suite). Nos estimateurs de $\alpha_{MBMG}(t) = \lim_{n\to\infty} H_n(t)$ sont obtenus, en localisant autour du point t, les variations quadratiques généralisées du MBMG. Il convient ici de signaler que l'une des raisons de l'invention de l'analyse multifractale est l'impossibilité d'estimer un exposant de Hölder ponctuel beaucoup trop erratique. Aussi une question naturelle qu'on peut se poser est la suivante. Quel peut être le degré maximal d'irrégularité de l'exposant de Hölder ponctuel du MBMG pour qu'il reste identifiable en chaque point ? Le résultat que nous venons de donner fournit un élément de réponse à cette question. Il montre en effet que l'identification est possible dès que cet exposant appartient à la première classe de Baire. Cela pourrait paraître un peu surprenant. En effet, même si l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de cette classe est "maigre" (i.e. d'intérieur vide), il existe beaucoup de fonctions très irrégulières qui y appartiennent. Dans la pratique (voir [15]) nous avons déjà pu, de façon assez satisfaisante, faire l'identification lorsque l'exposant de Hölder ponctuel du MBMG est une fonction en escalier ou même une fonction constante partout sauf en un nombre fini de points. Notons au passage, que nos simulations montrent qu'avec le MBMG, on peut numériquement faire la distinction entre un exposant de Hölder ponctuel qui est constant partout et un autre exposant de Hölder ponctuel qui est constant partout sauf en un seul point. Cela témoigne de la précision de ce modèle.

8.3.2 Champs anisotropes

Les techniques que nous avons développées dans le cadre de notre étude des processus Multifractionnaires peuvent s'adapter à des contextes différents notamment celui des champs anisotropes. L'une des motivations de l'étude des champs anisotropes est de répondre à un besoin de certains médecins désireux de disposer de nouveaux logiciels permettant de détecter des pathologies osseuses comme l'ostéoporose. Les modèles anisotropes que nous étudions peuvent, en gros, se ramener à deux modèles : le Drap Brownien Fractionnaire (DBF) et le Champ Brownien Fractionnaire Anisotrope (CBFA). Nous noterons le DBF par $\{B^{(H)}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ parce qu'il dépend essentiellement d'un seul multiparamètre $H=(H_1,\ldots,H_N)\in]0,1[^N$. La covariance de ce champ est un produit tensoriel de covariances de MBF univariés de paramètre H_i. Le CBFA a été introduit par Bonami et Estrade. Nous le noterons par $\{X^{(h)}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ parce qu'il est obtenu en substituant au paramètre de Hurst du MBF une fonction $h(\eta)$ qui est définie sur la sphère $S^{N-1}=\{\eta\in\mathbb{R}^N;\,|\eta|=1\}$ du domaine fréquentiel. Le DBF suscite de plus en plus d'intérêt depuis plusieurs années. Il intervient de façon naturelle dans de multiples domaines, comme par exemple les équations aux dérivées partielles stochastiques et l'étude des sites les plus visités des processus de Markov symétriques. Sa structure de covariance est nettement plus simple que celle du CBFA. Par contre, seul un nombre fini de paramètres permet d'ajuster son anisotropie, alors que pour le CBFA, toute une fonction est disponible. Une autre propriété commode du CBFA est que ses accroissements sont stationnaires, alors que pour le DBF, seuls les accroissements rectangulaires sont stationnaires.

En collaboration avec Léger et Pontier nous avons montré que le DBF est stable par perturbation de son multiparamètre [21]. Un tel résultat peut avoir de l'importance dans certains problèmes liés à la simulation d'un DBF. En effet, de façon générale, lorsqu'on cherche à simuler un champ stochastique en vue de sa validation comme modèle, il est tout à fait possible qu'il existe une marge d'incertitude concernant le choix des valeurs de ses paramètres. Nous avons également introduit une décomposition en ondelettes de ce champ en vue de le simuler [19].

Dans le cadre d'une collaboration avec Bonami et Estrade (voir [9]), au moyen de la méthode des variations quadratiques généralisées, nous avons construit pour tout η, un estimateur de $h(\eta)$, où $h(\cdot)$ désigne la fonctionnelle d'anisotropie d'un champ Gaussien généralisant le CBFA. Nous avons également introduit [9] des décompositions en séries aléatoires de ce champ en vue de le simuler et de pousser plus loin son étude. Signalons enfin que notre collaboration avec Bonami sur ce sujet se poursuit dans le cadre de l'ANR "Analyse Harmonique et Problèmes Inverses".

8.3.3 Autres résultats

- Processus Gaussien Multifractionnaire Généralisé (PGMG) : En collaboration avec Benassi, Cohen et Lévy Véhel nous avons introduit dans [16] le PGMG. Ce processus est obtenu en substituant au paramètre de Hurst dans la représentation harmonisable du MBF une fonction $H(t,\xi)$ à valeurs dans un compact de $]0,1[$. Au fond, la forme de l'intégrale de Wiener qui permet de définir le PGMG est très proche de celle qui permet de définir le MBMG ; la seule différence est que la variable discrète n est remplacé par la variable continue ξ et donc ce n'est plus la peine de découper le domaine fréquentiel. Dans [16] nous avons supposé que pour tout t, $\lim_{\xi\to+\infty} H(t,\xi)$ existe et nous avons noté cette limite par $h(t)$; en imposant à $H(t,\xi)$ certaines conditions techniques, nous avons pu montrer que l'exposant de Hölder ponctuel du PGMG vérifie pour tout t, $P\{\alpha_{PGMG}(t) = h(t)\} = 1$ et nous avons pu construire un estimateur de la quantité $\liminf_{s\to t} h(s)$ au moyen de la méthode des variations quadratiques généralisées.

- Propriétés de de longue dépendance du MBM : En collaboration avec Cohen et Lévy Vehel, dans [25] nous montrons d'abord que la fonction de covariance du MBM peut s'exprimer, non seulement sous la forme d'une intégrale, mais également sous une forme qui généralise celle de la fonction de covariance du MBF. Ensuite, grâce à ce résultat, nous obtenons certaines propriétés de longue dépendance du MBM.

- Théorèmes Central Limite pour des variations quadratiques généralisées : Signalons tout d'abord que de façon générale il est utile de disposer de tels théorèmes, notamment parce qu'ils permettent de construire des tests ainsi que des intervalles de confiance. Le Mouvement Brownien Fractionnaire par Morceaux (MBFM) est un processus Gaussien continu qu'on peut presque voir comme un MBF dont le paramètre de Hurst change brutalement d'une période à une autre et reste constant sur une même période (l'ensemble des indices du processus, c'est-à-dire la droire réelle, est découpé en un nombre fini de périodes). Ce processus s'exprime comme une série aléatoire du type ondelettes et a été introduit par Benassi, Bertrand, Cohen et Istas. Ces auteurs ont également construit, à partir des variations quadratiques généralisées du MBFM des estimateurs de ses parmètres de Hurst ainsi que des instants de ruptures correspondants (c'est-à-dire des instants de transition d'une période à une autre). Dans l'article [10] que nous avons écrit en collaboration avec Bertrand, en utilisant des techniques d'ondelettes et des résultats classiques sur les matrices de covariances, nous avons pu borner convenablement les valeurs propres de la matrice de covariance associée aux accroissements généralisés du MBFM, ce qui nous a permis d'obtenir un Théorème Central Limite pour les variations quadratiques généralisées de ce processus. Signalons enfin, qu'en collaboration avec Lévy Véhel, nous avons pu obtenir dans [15], sous certaines conditions, un Théorème Central Limite analogue pour le MBMG.

8.4 Séries aléatoires

8.4.1 Résultats uniformes sur le comportement local

C'est le problème d'établir des résultats uniformes du type (8.4) sur le comportement local d'un champ stochastique $X = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^N}$ qui a initialement motivé notre intérêt pour les séries aléatoires. L'idée de base est d'écrire X sous la forme

$$X(t,\omega) = \sum_{l,j,k} \epsilon_{l,j,k}(\omega) a_{l,j,k} \Psi_l(2^j t - k), \tag{8.8}$$

où $\{\epsilon_{l,j,k}\}_{l,j,k}$ désigne une suite de variables aléatoires de même loi qui isole l'aléa, $(a_{l,j,k})_{l,j,k}$ une suite de nombres complexes déterministes et $(\Psi_l)_l$ une suite finie de fonctions déterministes du type ondelette. On impose généralement à Ψ_l d'être bien localisée (i.e. $|\Psi_l(x)| \leq c(1+|x|)^{-\gamma}$ pour tout x, où l'exposant γ est assez grand), d'avoir de la régularité et de posséder des moments nuls (i.e. $\int_{\mathbb{R}^N} x^m \Psi_l(x)\, dx = 0$ pour $0 \leq m \leq M$). Grâce à ces propriétés sympathiques et plus particulièrement la propriété de localisation, le comportement local de X au voisinage d'un point t dépend surtout des termes de la série aléatoire (8.8) qui sont proches de t (c'est-à-dire tels que $|t - 2^{-j}k|$ est petit). Dans ce contexte, la stratégie qui permet d'obtenir des résultats uniformes sur ce comportement, consiste à trouver de fines estimations déterministes (à une variable aléatoire multiplicative près) de la croissance de la suite $\{|\epsilon_{l,j,k}|\}_{l,j,k}$; ces estimations ne doivent en outre pas dépendre de t car sinon on perd l'uniformité. Minorer finement cette suite permet d'avoir un fin majorant de la régularité de X et constitue généralement un problème nettement plus délicat que celui de la majoration de cette suite.

En collaboration avec Jaffard et Taqqu, nous avons d'abord utilisé dans [8] une première variante de cette stratégie pour prouver que l'exposant de Hölder ponctuel du PMGEA vérifie (8.6). Dans ce cas, les variables aléatoires $\epsilon_{l,j,k}$ sont indépendantes de même loi Gaussienne centrée réduite et cela rend moins difficile le problème de la minoration de la suite $\{|\epsilon_{l,j,k}|\}_{l,j,k}$.

Ensuite, en collaboration avec Xiao, nous avons utilisé dans [12], une seconde variante de cette stratégie pour déterminer l'exposant de Hölder ponctuel directionnel du DBF. Plus précisément, fixons s un point de $\mathbb{R}^N$ dont les coordonnées sont toutes non nulles et désignons par $B_s^{(H)} = \{B_s^{(H)}(t_i)\}_{t_i \in \mathbb{R}}$ la restriction du DBF à la droite passant par le point s et parallèle au i-ème axe, nous avons montré que

$$\mathbb{P}\{\forall\, s, \forall\, t_i,\ \alpha_{B_s^{(H)}}(t_i) = H_i\}. \tag{8.9}$$

Dans ce cas, une difficulté considérable provient du fait que les variables aléatoires $\epsilon_{l,j,k}$ doivent être remplacées par des “moyennes”, notées par $C_{j,k}$, du DBF le long de la i-ème direction et ces moyennes doivent être pondérées par des ondelettes univariées bien choisies. Cependant, on peut voir les $C_{j,k}$ comme une suite de DBF sur $\mathbb{R}^{N-1}$ indépendants et de même loi ce qui est quand même assez commode. Signalons au passage que certaines des techniques que nous avons utilisées pour établir (8.9), nous ont également permis dans [12] d'obtenir une fine estimation du comportement directionnel à l'infini du DBF.

Enfin, en collaboration avec Roueff et Xiao, nous avons utilisé dans [2,7] une troisième variante de la stratégie qui a été décrite plus haut pour déterminer l'exposant de Hölder global directionnel ainsi que d'autres propriétés trajectorielles du Drap Fractionnaire Stable Linéaire (DFSL) que nous notons par $B^{(H,\alpha)} = \{B^{(H,\alpha)}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$ (ici $H \in]0,1[^N$ désigne le multiparamètre de Hurst et $\alpha \in]0,2]$ un paramètre caractéristique de l'épaisseur de la queue de la loi Stable qui vaut 2 dans le cas Gaussien). Le DFSL est le champ stochastique Strictement α Stable obtenu en remplaçant, dans la représentation sous forme de moyenne mobile non anticipative du DBF, la mesure Gaussienne par une mesure Strictement α Stable. Même si ces deux champs stochastiques sont analogues par certains aspects (par exemple ils possèdent la même forme d'auto-similarité), il existe quand même des différences considérables entre eux (par exemple les trajectoires du DBF sont toujours continues alors que celles du DFSL sont non bornées sur aucun ouvert dès que $\min(H_1,\ldots,H_N) < 1/\alpha$). Désormais, nous supposons que $\min(H_1,\ldots,H_N) > 1/\alpha$ car cette condition nous garantit la continuité des trajectoires de $\{B^{(H,\alpha)}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^N}$. Reprenant une notation analogue à précédemment, nous désignons par $B_s^{(H,\alpha)} = \{B_s^{(H,\alpha)}(t_i)\}_{t_i\in\mathbb{R}}$ la restriction du DFSL à la droite parallèle au i-ème axe qui passe par un point fixé s dont les coordonnées sont toutes non nulles. De plus, nous notons par $\beta_{B_s^{(H,\alpha)}}(I)$ l'exposant de Hölder global[2] du processus $B_s^{(H,\alpha)}$ sur un intervalle arbitraire borné $I \subset \mathbb{R}$. Le principal résultat de [7] est que

$$\mathbb{P}\{\forall\, s, \forall\, I,\ \beta_{B_s^{(H,\alpha)}}(I) = H_i - 1/\alpha\}. \tag{8.10}$$

Des résultats nettement plus précis que (8.10), parce qu'ils tiennent compte du facteur logarithmique, ont été obtenus dans [2]. De façon analogue au cas Gaussien, les variables aléatoires $\epsilon_{l,j,k}$ doivent être remplacées par des “moyennes”, notées par $C_{j,k}$, du DFSL le long de la i-ème direction et ces moyennes doivent être pondérées par des ondelettes

2. $\beta_X(I)$ l'exposant de Hölder global sur un intervalle borné I d'un processus continu et nulle part dérivable $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est défini par

$$\beta_X(I) = sup\Big\{\beta \geq 0 : \sup_{t',t''\in I} \frac{|X(t') - X(t'')|}{|t'-t''|^\beta} < \infty\Big\}.$$

univariées bien choisies. Là encore, les $C_{j,k}$ peuvent être identifiées à une suite de DFSL sur $\mathbb{R}^{N-1}$ de même loi. De plus, quitte à se restreindre à des sous-suites bien choisies, on peut retrouver la propriété d'indépendance. La principale difficulté dans le cas stable est que la croissance de la suite $(|C_{j,k}|)_{j,k}$ est beaucoup plus rapide que dans le cas Gaussien, cela provient du fait que les lois stables sont à queue épaisse. Signalons enfin que certaines des techniques que nous avons utilisées pour établir (8.10) nous ont également permis dans [2] d'obtenir de fines estimations des comportements directionnels à l'infini et en zéro du DFSL.

8.4.2 Séries aléatoires optimales

Il convient d'abord de préciser ce qu'on appelle séries aléatoires optimales. D'après un résultat général sur les variables aléatoires Gaussiennes à valeurs dans un espace de Banach, on sait que tout champ Gaussien centré et à trajectoires continues $Y = \{Y(t)\}_{t\in[0,1]^N}$ peut s'écrire, presque sûrement, pour tout $t \in [0,1]^N$,

$$Y(t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(\omega) f_k(t), \tag{8.11}$$

où $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires Gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes et $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,1]^N$ et où la série est avec probabilité 1, convergente au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$. En général, il n'y a pas unicité de ce type de représentations et il est naturel de rechercher des représentations optimales, dans le sens où la norme de la queue de la série $\|\sum_{k=n}^{\infty}\epsilon_k f_k\|_\infty$ tend le plus vite possible vers 0, lorsque $n\to\infty$. Cela nous amène donc à l'étude des quantités,

$$l_n(Y) = \inf\Big\{\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\epsilon_k f_k\Big\|_\infty^2\Big)^{1/2};\ Y=\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon_k f_k\Big\},$$

qui sont appelées les l-nombres du champ Gaussien Y. Le comportent asymtotique de ces quantités est déterminé par certaines propriétés des opérateurs qui génèrent Y, par exemple leur Hölderianité et le comportement de leurs valeurs propres. Une représentation du type (8.11) est dite optimale lorsque $\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\epsilon_k f_k\Big\|_\infty^2\Big)^{1/2}$ converge vers 0 à la même vitesse que $l_n(Y)$ quand $n\to\infty$. Kühn et Linde ont donné un encadrement très fin des l-nombres de $B^{(H)}$ le DBF. Plus précisément, ils ont montré qu'il existe deux constantes $0 < c_1 \le c_2$, telles que pour tout $n \ge 2$, on a

$$c_1 n^{-H_1}(\log n)^{(M-1)H_1+M/2} \le l_n(B^{(H)}) \le c_2 n^{-H_1}(\log n)^{(M-1)H_1+M/2}, \tag{8.12}$$

ici on suppose que les paramètres H_i sont ordonnés, de façon croissante, c'est-à-dire que

$$0 < H_1 = \ldots = H_M < H_{M+1} \le \ldots \le H_N,$$

et M désigne le nombre de fois où le plus petit paramètre (c'est-à-dire H_1) est répété. Le problème de construire une représentation explicite du DBF, comme une série aléatoire du type (8.11) permettant d'atteindre la vitesse de convergence optimale $n^{-H_1}(1+\log n)^{(M-1)H_1+M/2}$ demeurait ouvert. Comme la covariance du DBF est un produit tensoriel de covariances de MBF univariés, la principale difficulé de ce problème est de le résoudre dans le cas où $N = 1$. Une fois que l'on dispose d'une représentation optimale pour le MBF univarié, il existe des procédés canoniques pour l'étendre au DBF. Dans un travail en collaboration avec Taqqu [17], nous avons montré que les représentations du MBF univarié en séries aléatoires d'ondelettes permettent d'atteindre la vitesse de convergence optimale. Rappelons au passage que ces représentations en ondelettes avaient été introduites par Meyer, Sellan et Taqqu dans l'objectif d'étendre au MBF, l'importante décomposition du Mouvement Brownien dans le système de Faber-Schauder qui est due à Paul Lévy.

Récemment dans le cadre d'un travail en collaboration avec Linde [3], nous avons pu obtenir une fine majoration des l-nombres de tout champ Gaussien centré Y vérifiant, en moyenne quadratique, une condition de Hölder d'ordre H (où $H \in]0,1]$) i.e. il existe une constante $c_3 > 0$ telle que pour tous $s,t \in [0,1]^N$ on a

$$\mathbb{E}(|Y(s) - Y(t)|^2) \leq c_3 |s-t|^{2H}. \tag{8.13}$$

Plus précisément, nous avons montré que lorsque (8.13) est vérifiée, alors pour tout $n \geq 2$,

$$l_n(Y) \leq c_4 n^{-H/N} (\log n)^{1/2}. \tag{8.14}$$

Ce résultat met bien en évidence le fait que plus un champ Y est régulier, plus vite convergent ses l-nombres vers 0. Il est à noter que moyennant certaines modifications, (8.14) reste vraie lorsque l'ensemble des indices $[0,1]^N$ est remplacé par un ensemble auto-similaire T vérifiant la condition dite "de l'ensemble ouvert" (voir [3]). Une fine minoration des l-nombres de tout champ Gaussien centré et à trajectoires continues $Y = \{Y(t)\}_{t \in T}$ a été également obtenue dans [3]. Plus précisément désignons par μ une mesure borélienne bornée quelconque sur T et par $\mathcal{R}_Y$ l'opérateur auto-adjoint positif de $L^2(T,\mu)$ dans lui-même défini par

$$(\mathcal{R}_Y f)(t) = \int_T R_Y(t,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

où $R_Y(\cdot,\cdot)$ est la fonction de covariance de Y. Alors, il existe une constante $c_5 > 0$ telle que pour tout $n \geq 2$,

$$\sqrt{n \log n}\, \lambda_{3n-2}(\mathcal{R}_Y)^{1/2} \leq c_5 \mu(T)^{1/2} l_n(Y), \tag{8.15}$$

où $(\lambda_m(\mathcal{R}_Y))_{m \in \mathbb{N}}$ désigne la suite décroissante des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{R}_Y$. Les résultats (8.14) et (8.15) nous ont permis de prouver (voir [3]) que la vitesse de convergence des l-nombres du Mouvement Brownien Fractionnaire multivarié (qu'on appelle également Mouvement Fractionnaire de Lévy) est $n^{-H/N}(\log n)^{1/2}$. Il est à noter qu'en comparant ce dernier résultat à (8.12), on s'aperçoit que lorsque la dimension N augmente, la vitesse de convergence des l-nombres se détériore beaucoup plus dans le cas du MBF multivarié que dans celui du DBF. Nous avons enfin montré dans [3] que la décomposition en ondelettes standard du MBF multivarié est optimale.

Venons en maintenant, à la présentation des principaux résultats de la prépublication [31], qui est un autre travail très récent en collaboration avec Linde. Supposons que $X = \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ est un processus à trajectoires continues de la forme

$$X(t) = \int_I K(t,x)\, dW(x), \tag{8.16}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et dW est le bruit blanc. En developpant pour tout t, le noyau $K(t,\cdot)$ dans une base orthonormée $\mathbf{\Phi} = (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2(I)$ on obtient, grâce au Théorème d'Itô-Nisio, une représentation de X de la forme (8.11) pour laquelle $f_k(t) = \int_I K(t,x)\varphi_k(x)\, dx$ et $\varepsilon_k = \int_I \varphi_k(x)\, dW(x)$. Il est alors naturel de chercher des conditions qui assurent l'optimalité d'une telle représentation de X. Ce problème semble très difficile à résoudre en toute généralité. L'objectif principal de [31] est de l'étudier dans le cas où X est le processus de Riemann-Liouville de paramètre $\alpha > 1/2$, noté par R^α et défini pour tout $t \in [0,1]$ par

$$R^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\, dW(x). \tag{8.17}$$

Signalons au passage que, depuis quelques années, le processus R^α suscite de plus en plus d'intérêt, notamment parce qu'il correspond à la partie haute fréquence du MBF de paramètre de Hurst $H = \alpha - 1/2$ lorsque $\alpha \in]1/2, 3/2[$. Nous supposons également dans [31] que $\mathbf{\Phi}$ est l'une des deux bases orthonormées les plus classiques de $L^2([0,1])$: le système trigonométrique noté par $\mathbf{T}$ et le système de Haar noté par $\mathbf{H}$. Quand $\mathbf{\Phi} = \mathbf{T}$, nous montrons qu'on a l'optimalité si et seulement si $\alpha \in (1/2, 2]$ et sinon on ne peut même pas l'avoir en renumérotant les éléments de $\mathbf{T}$. Quand $\mathbf{\Phi} = \mathbf{H}$, nous montrons qu'on a l'optimalité lorsque $\alpha \in]1/2, 3/2[$ et qu'on ne l'a pas, même en renumérotant les éléments de $\mathbf{H}$, lorsque $\alpha > 3/2$. De plus, de fines estimations de la vitesse de convergence de la série (8.11) ont été obtenue pour toutes valeurs de α et pour tout choix d'une numérotation des éléments de $\mathbf{T}$ ou de $\mathbf{H}$.

8.4.3 Appartenance des trajectoires aux espaces L^p

Très récemment, dans le cadre d'un travail en collaboration avec Tzvetkov (voir [4]) nous nous sommes intéressés à la question de l'appartenance presque sûre aux espaces L^p des trajectoires d'une série aléatoire. L'une des motivations était de construire une mesure de Gibbs non triviale sur un espace L^2, invariante par le flot d'une équation non linéaire de type Schrödinger. Une autre motivation était de mettre en évidence la non optimalité de l'inégalité de Sobolev. Nous nous sommes d'abord placés dans un cadre tout à fait général, plus précisément nous avons considéré des séries aléatoires de la forme

$$F_c(\omega, r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\omega) c_n e_n(r), \tag{8.18}$$

où $\{g_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires Gaussiennes standards et indépendantes, $c = (c_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes appartenant à $l^2(\mathbb{N}^*)$ et $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est une base orthonormée de $L^2(Y, \mathcal{M}, \mu)$; l'espace mesurable $(Y, \mathcal{M})$ est arbitraire et μ est une mesure bornée quelconque sur cet espace. Nous avons alors montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les trajectoires de F_c appartiennent presque sûrement à $L^p(Y, \mathcal{M}, \mu)$, $p \geq 2$, pour toute suite $c \in l^2(\mathbb{N}^*)$, est que les normes $L^p(Y, \mathcal{M}, \mu)$ des fonctions e_n soient bornées uniformément en n. Notre preuve de ce résultat repose essentiellement sur l'équivalence des moments Gaussiens et sur un théorème d'intégrabilité dû à Fernique.

Nous nous sommes ensuite posés le problème suivant : fixons une suite $c \in l^2(\mathbb{N}^*)$ est-il possible de déterminer $p_{cr}(c)$, l'exposant p critique (correspondant à cette suite) au-delà duquel les trajectoires de F_c n'appartiennent plus à $L^p(Y, \mathcal{M}, \mu)$?

Ce problème semble difficile à résoudre en toute généralité, nous avons donc supposé que la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est la base des fonctions propres de la restriction de l'opérateur de Laplace aux fonctions radiales de l'espace de Lebesgue $L^2(D^d)$ où D^d est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 3$. Signalons au passage que cette base est intimement liée à la fonction de Bessel. Nous nous sommes également placés dans le cas où la suite $c = (c_n)_{n\geq 1}$ vérifie pour tout $n \geq 1$, $\alpha_1 n^{-1} \leq c_n \leq \alpha_2 n^{-1}$, où α_1 et α_2 sont deux constantes positives. Nous avons alors pu montrer que $p_{cr}(c) = \frac{2d}{d-2}$. Signalons enfin que notre choix de la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ et de la suite c est motivé par la construction de la mesure de Gibbs dont il était question plus haut.

8.5 Autres directions de recherche

8.5.1 Estimation de dimensions de Hausdorff

La dimension de Hausdorff d'un ensemble fractal $A \subset \mathbb{R}^M$, que l'on note par $\dim_H A$, permet de décrire de façon très précise la complexité géométrique de A. Majorer finement $\dim_H A$ n'est certes pas toujours une tâche facile, cependant ce problème est habituellement beaucoup moins difficile que celui qui consiste à minorer finement $\dim_H A$. La majoration de $\dim_H A$ se fait en construisant à chaque échelle δ un recouvrement de A par des boules de diamètre $\leq \delta$ qui soit le plus "économique" possible (c'est-à-dire qui comporte le moins de boules possibles). Lorsque l'ensemble A est généré par une fonction fractale f (typiquement A est le graphe de f) cette construction peut se faire en utilisant un fin module de continuité de f. La minoration de $\dim_H A$, quant-à-elle, nécessite en général d'utiliser des arguments de la théorie des capacités. Plus précisément, si l'on souhaite prouver que $\dim_H A \geq \gamma$, la méthode habituelle consiste à construire une mesure μ supporté par A et dont l'énergie d'ordre γ,

$$I_\gamma(\mu) = \int\int |x-y|^{-\gamma}\, d\mu(x)d\mu(y),$$

est finie.

Bien souvent en géométrie fractale on s'intéresse à l'estimation presque sûre des dimensions de Hausdorff d'ensembles aléatoires générés par un champ X défini sur $T \subset \mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Ces ensembles sont typiquement l'image de X i.e. $X(T) = \{X(t)\,;\, t \in T\}$, le graphe de X i.e. $\mathrm{Gr}\, X(T) = \{(t, X(t))\,;\, t \in T\}$ et les lignes de niveau de X i.e. $\mathrm{L}_a\, X(T) = \{t \in T\,;\, X(t) = a\}$ où $a \in \mathbb{R}^d$ est arbitraire et fixé. Désormais, sauf mention du contraire, nous supposons que les coordonnées de X sont d copies indépendantes d'un champ stochastique Gaussien centré X_0 défini sur T et à valeurs réelles. Dans ce cadre les majorations de $\dim_H X(T)$, $\dim_H \mathrm{Gr}\, X(T)$ et $\dim_H \mathrm{L}_a\, X(T)$ s'obtiennent au moyen d'une majoration de $\sigma_{X_0}(t,s) = \Big(\mathbb{E}|X_0(t) - X_0(s)|^2\Big)^{1/2}$ et les minorations de ces dimensions au moyen d'une minoration de $\sigma_{X_0}(t,s)$.

Nous allons maintenant parler de nos propres travaux. Dans un article en collaboration avec Xiao (voir [12]) nous avons calculé $\dim_H X(T)$, $\dim_H \mathrm{Gr}\, X(T)$ et $\dim_H \mathrm{L}_a\, X(T)$ dans le cas où $X_0 = B^{(H)}$ le DBF et $T = [0,1]^N$. Le DBF a une structure de covariance nettement plus compliquée que celle du MBF et cela rend difficile le problème de la minoration de $\sigma_{B^{(H)}}(t,s)$. Une première technique pour contourner cette difficulté a été introduite dans [14] ; elle repose essentiellement sur certaines propriétés sympathiques de la décomposition en ondelettes du DBF et elle a permis dans [14] le calcul de la dimension de Hausdorff du graphe de ce champ. Une autre technique pour contourner cette difficulté a été introduite dans [12]. Cette dernière technique repose essentiellement sur une décomposition de $B^{(H)}$ qui consiste essentiellement à le voir comme une somme de MBF univariés indépendants et dont les paramètres de Hurst sont les H_i. Nous verrons plus loin que cette décomposition joue également un rôle très important dans le cadre de l'étude de la régularité des temps locaux de $B^{(H)}$.

Très récemment, dans [2], nous avons calculé $\dim_H X(T)$ et $\dim_H \mathrm{Gr}\, X(T)$ dans le cas où X_0 est le DFSL et $T = [0,1]^N$. Dans ce contexte de lois de probabilités à queues épaisses, $\sigma_{X_0}(t,s)$ doit être remplacé par le paramètre d'échelle de la variable aléatoire stable $X_0(t) - X_0(s)$, car les moments d'ordre 2 sont infinis. La minoration de $\dim_H X(T)$ et $\dim_H \mathrm{Gr}\, X(T)$ se fait en utilisant les mêmes idées que dans le cas Gaussien. Paradoxalement, la majoration de ces dimensions est ici un problème plus délicat que leur minoration et il nécessite la mise en oeuvre de techniques assez sophistiquées.

8.5.2 Régularité de temps locaux

Nous avons déjà décrit dans la sous-section 8.4.1 une méthode d'ondelettes qui a été introduite dans [8] et qui permet d'obtenir des résultats uniformes sur le comportement local d'un champ stochastique. Comme nous l'avons déjà dit, la partie la plus difficile dans la preuve de ce genre de résultats est de montrer que le champ possède localement un certain degré d'irrégularité. Une autre méthode qui permet d'obtenir des résultats uniformes d'irrégularité locale pour un champ stochastique est la méthode du temps local : d'après une idée tout à fait générale due à Berman et qui remonte aux années soixante-dix, pour montrer qu'un champ stochastique possède de l'irrégularité, il suffit de prouver que son temps local possède de la régularité. La méthode du temps local est plus classique que la méthode d'ondelettes. Elle présente l'avantage de donner des résultats nettement plus précis (lois du logarithme itéré du type Chung), mais en contrepartie elle est souvent plus difficile à mettre en oeuvre.

Récemment, dans le cadre d'une collaboration avec Wu et Xiao, nous nous sommes intéressés dans [5] à l'étude de certaines propriétés de régularité du temps local du champ Gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont des copies indépendantes du DBF ; l'existence de ce temps local avait déjà été établie par Xiao et Zhang. L'une des principales difficulés dans ce genre de problèmes d'étude de régularité est que, contrairement au MBF, le DBF ne vérifie pas la propriété dite de non déterminisme local. Heuristiquement parlant, cette propriété signifie que les accroissements sont presque indépendants. Nous avons pu contourner cette difficulté en utilisant la notion de non déterminisme local directionnel ainsi que la décomposition du DBF qui permet de le voir comme une somme de MBF univariés indépendants, dont il était déjà question plus haut. Nous avons alors réussi à établir la bicontinuité du temps local résolvant ainsi une conjecture de Xiao et Zhang. Nous avons également pu montrer que, sous une certaine hypothèse technique sur les paramètres H_i, le temps local vérifie des conditions de Hölder et cela nous a permis d'obtenir une loi du logarithme itéré du type Chung pour le DBF. Ce dernier résultat est sans doute nettement plus précis que celui obtenu dans [12] par la méthode d'ondelettes, mais d'un autre côté, la méthode d'ondelettes ne nécessite d'imposer aucune condition aux paramètres H_i.

Très récemment, dans le cadre d'une collaboration avec Roueff et Xiao, nous nous sommes intéressés dans [6] au temps local du champ stable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont des copies indépendantes du DFSL. Nous avons établi l'existence de ce temps local et nous avons prouvé sa bicontinuité. Par certains aspects, la preuve de la bicontinuité s'écarte considérablement de celle dans le cas Gaussien (voir [5]). La raison de cet écart est que de nouvelles difficultés apparaissent dans le cas stable. Ces nouvelles difficultés, proviennent essentiellement du fait que l'on connaît peu de propriétés des lois stables conditionnelles.

9 Activités de recherche en Sciences de Gestion

Parallèlement à mes travaux de recherche en Mathématiques, depuis mon arrivée à Lille, j'ai commencé à interagir avec certains enseignants chercheurs en Sciences de Gestion qui font partie de l'IAE, ma composante de rattachement à l'Université Lille I. Ainsi, en m'associant à Myriam Fradon (Maître de Conférence à l'UFR de Mathématiques), nous avons pu développer une collaboration avec Michel Calciu (Maître de Conférence à l'IAE en Marketing) et Francis Salerno (Professeur à l'IAE en Marketing). L'objet principal de cette collaboration est l'étude de la Valeur Actualisée du Client (VAC), plus couramment appelée "Lifetime Value". Il s'agit d'un indicateur qui joue un rôle fondamental en Marketing relationnel. Il est défini suivant un principe analogue à celui qu'on utilise pour évaluer la valeur financière d'une action au moyen des dividendes futurs espérés. Ainsi, il permet de mesurer la somme des revenus potentiels moyens actualisés qui vont être générés tout au long de la relation commerciale avec un certain client.

Le futur comportement d'un consommateur est aléatoire : il est clair que dans le futur rien ne l'oblige d'acheter à chaque période le produit proposé par une firme. Comme l'ont suggéré Jackson (1986) et Dwyer (1989), deux catégories de modèles permettent de décrire ce comportement. Ceux de la première catégorie sont appelés modèles de rétention. Ces modèles considèrent que lorsqu'un client ne génère pas de transaction au cours d'une période alors il ne va plus générer de transactions dans les périodes ultérieures "il est perdu pour de bon" ; lorsqu'un "ex-client" se remet à acheter le produit proposé par la firme, il sera considéré comme un nouveau client et il s'agira alors d'acquisition et non de rétention de clientèle. Ainsi, comme l'ont proposé Blattberg (2001) et d'autres auteurs, le nombre aléatoire de périodes où le client est actif peut être modélisé par l'une des lois de probabilités qui permet de décrire "la durée de vie" d'un matériel en Fiabilité. Nous reviendrons un peu plus loin sur les modèles de rétention. Les modèles de la seconde catégorie sont appelés modèles de migration. Ces modèles considèrent que lorsqu'un client ne génère pas de transaction au cours d'une ou de quelques périodes, il peut quand même se réactiver ultérieurement. Pfeifer et Carraway (2000) ont proposé de décrire ce genre de comportement au moyen des chaînes de Markov.

Nos travaux en collaboration avec Calciu, Fradon et Salerno portent sur les modèles de rétention. L'un de nos objectifs est de trouver des formules explicites permettant de calculer de façon exacte la Valeur Actualisée du Client (VAC). Calciu et Salerno (2002) avait déjà résolu ce problème dans le cas où "la durée de vie" du client suit une loi géométrique. La formule qu'ils ont obtenue présente l'avantage d'être simple et facile à mettre en oeuvre. Cependant, il ne semble pas réaliste d'imposer à "la durée de vie" du client d'avoir une distribution géométrique. En effet, une telle hypothèse oblige la probabilité de rétention, notée par p_t, à rester constante d'une période à l'autre (c'est-à-dire à ne pas dépendre de t) ; signalons au passage que p_t est la probabilité conditionnelle d'être client à la période t lorsqu'on l'a été à la période $t-1$. Les calculs deviennent vite compliqués lorsque p_t varie au cours du temps. Afin de pouvoir contourner cette difficulé nous avons introduit dans [1,2] une nouvelle formulation de la VAC qui repose sur la notion de fonction génératrice et cela nous a permis de déterminer la VAC dans le cas où la durée de vie du client est distribuée suivant une loi de Poisson. Nous avons également introduit dans [1,2] une généralisation du modèle de rétention dans laquelle on accorde plus de tolérance au client : on n'arrête de le considérer comme client que s'il ne fait aucune transaction pendant plus de k périodes, où l'entier $k \geq 2$ est fixé. "La durée de vie" du client suit alors une loi binomiale négative et la VAC correspondante peut être calculée au moyen de la notion de fonction génératrice.

Présentons enfin les grandes lignes de notre article [3]. Dans ce papier on se pose essentiellement la question de trouver le meilleur équilibre entre les dépenses d'acquisition et de rétention de clientèle. Ce problème est en fait très relié à celui qui consiste à déterminer R^*, la dépense optimale de rétention de clientèle (R^* est la dépense de rétention qui permet de maximiser la VAC). Nous allons nous focaliser ici sur ce dernier problème parce qu'il est moins compliqué à expliquer. Reprenant les mêmes hypothèses que dans [3] (sans ces hypothèses le problème devient difficile à résoudre), nous supposons que la marge notée par m (c'est-à-dire le prix du produit proposé par la firme) ainsi que la dépense de rétention notée par R, restent constantes d'une période à une autre. Nous supposons également que la probabilité de rétention reste constante d'une période à une autre et qu'elle ne dépend que de R ; on la désigne donc par $p(R)$. Un choix classique de $p(R)$, proposé initialement par Blattberg et Deighton (1996), est "la fonction exponentielle modifiée" :

$$p(R) = c\Big(1 - \exp(-kR)\Big).$$

Ici, le paramètre c désigne le seuil que la probabilité de rétention ne peut franchir quelque soit l'effort marketing R de la firme. Le paramètre k, quant-à-lui, permet de décrire la sensibilité du client à cet effort marketing. Un tel choix de $p(R)$ présente sans doute des avantages mais aussi des inconvénients. L'un des principaux inconvénients est que la dépense optimale de rétention R^* ne peut être déterminée de façon exacte au moyen d'une formule explicite, mais elle peut seulement être estimée de façon approximative au moyen d'algorithmes numériques. C'est pour cette raison que nous avons proposé dans [3] de prendre

$$p(R) = c\Big(1 - (1 + kR)^{-1}\Big).$$

Nous avons pu alors trouver une formule explicite donnant R^* et cela nous a permis d'aboutir à la règle managériale suivante : de façon générale, pour une firme la dépense de rétention n'est justifié que si $m > \frac{1}{ck}$.

10 Direction de Thèses

10.1 Thèse de Peng Qidi

Depuis septembre 2007, je dirige tout seul la thèse de Peng Qidi qui porte sur l'étude, à la fois d'un point de vue probabiliste et d'un point de vue statistique, de modèles "à volatilité stochastique" dirigés par des processus Multifractionnaires. Peng est inscrit à l'Université Lille I. Il a pu obtenir une allocation de recherche ordinaire ainsi qu'un poste de moniteur à l'UFR de Mathématiques. Je vais maintenant faire un descriptif de son sujet ainsi que de l'état d'avancement de sa thèse.

Dans l'objectif de rendre compte de certains phénomènes en finance de marché et notamment d'un aléa spécifique à la volatilité dû à des flux exogènes d'informations, Hull et White (1987), Scott (1987) et Melino et Turnbull (1990) ont introduit des modèles dit "à volatilité stochastique" (MVS). Dans certains de ces modèles, $Z(t)$ le logarithme du prix de l'actif sous-jacent est la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS) du type

$$\begin{cases} Z(t) = z_0 + \int_0^t \sigma(s)\, dB_1(s) \\ \sigma(s) = \sigma_0 + \Phi(\theta, B_2(s)), \end{cases} \tag{10.1}$$

où θ est un paramètre réel et B_1 et B_2 sont deux Mouvements Browniens indépendants. Dans l'objectif de rendre ces modèles plus réalistes, la dynamique Brownienne (c'est-à-dire B_2) a été remplacée progressivement par des processus Gaussiens plus sophistiqués. Notamment, Comte et Renault (1998) ont proposé de substituer B_H le Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF) à B_2, car cela permet de tenir compte de phénomènes de dépendance à long termes observés dans certains signaux financiers et permet également de calibrer la régularité de Hölder globale des trajectoires de la volatilité $\sigma(s)$.

Plus récemment Gloter et Hoffmann (2004) ont étudié plusieurs problèmes statistiques liés à l'estimation du paramètre inconnu θ dans ce type de MVS fractionnaire, lorsque le paramètre de Hurst H est connu et vérifie $H \geq 1/2$. En imposant à Φ certaines conditions de régularité et de croissance lente à l'infini, ils ont pu construire, à partir des données haute fréquence $Z(i/n)$, $i = 1, \ldots, n$, au moyen de la notion de variations quadratiques généralisées, une famille d'estimateurs optimaux de θ qui "convergent" à la vitesse $n^{-1/(4H+2)}$. Une étape fondamentale de leur méthode d'estimation consiste en la construction d'estimateurs d'une large classe de fonctionnelles intégrales de la volatilité fractionnaire ; signalons au passage que cette étape présente également un intérêt considérable en elle-même, notamment parce que de telles fonctionnelles apparaissent dans certaines formules de pricing d'options.

Le sujet de thèse de Peng se situe dans la continuité des travaux de Gloter et Hoffmann auxquels nous venons de faire référence. De façon générale, il porte sur l'étude de certains problèmes statistiques et probabilistes liés aux MVS multifractionnaire. Ces nouveaux MVS ont été introduits par Peng et par moi-même dans la prépublication [32] ; ils sont obtenus en substituant au Mouvement Brownien B_2 dans (10.1), un Mouvement Brownien Multifractionnaire (MBM), noté par X, indépendant de B_1. L'un des principaux avantages des MVS multifractionnaire par rapport aux MVS fractionnaire est qu'ils permettent de tenir compte, via le paramètre fonctionnel $H(\cdot)$, des variations locales de la régularité de Hölder des trajectoires de la volatilité $\sigma(s)$ (les fluctuations de la volatilité sont généralement beaucoup plus fréquentes en périodes de crise qu'en périodes de calme). Cependant la structure de dépendance (la fonction de covariance) du MBM est nettement plus compliquée que celle du MBF (voir [25]) et cela rend l'étude des MVS multifractionnaire plus difficile que celle des MVS fractionnaire.

Le sujet de thèse de Peng consiste, entre autre, en les directions de recherche suivantes :

(i) Estimation de fonctionnelles intégrales de la volatilité stochastique multifractionnaire et estimation du paramètre θ, lorsque le paramètre fonctionnel $H(\cdot)$ du MBM est connu.

(ii) Simulation et étude de la régularité du processus $\{Z(t)\}_{t\in[0,1]}$ généré par un MVS multifractionnaire, lorsque les paramètres θ et $H(\cdot)$ sont connus.

(iii) Identification du paramètre fonctionnel $H(\cdot)$.

Pour le moment, des avancées significatives ont été faites dans le cadre des directions de recherche (i) et (ii).

Présentons d'abord les avancées faites dans le cadre de la direction de recherche (i). En s'inspirant du travail de Gloter et Hoffmann mentionné plus haut on a pu construire dans [32], à partir des données haute fréquence $Z(i/n)$, $i=1,\dots,n$, au moyen de la notion de variations quadratiques généralisées, des estimateurs d'une large classe de fonctionnelles intégrales de la volatilité multifractionnaire ; en outre, sous certaines conditions, nous avons montré que leur vitesse de convergence en norme $L^1(\Omega)$ est $O(n^{-H_*/(2H^*+1)})$, où $H_*=\min_{s\in[0,1]}H(s)$ et $H^*=\max_{s\in[0,1]}H(s)$. Ce résultat nous a permis d'obtenir (voir [32]) un estimateur du paramètre θ des MVS multifractionnaire linéaire (ici linéaire signifie que la fonction Φ est de la forme $\Phi(\theta,x)=\theta x$) dont la vitesse de convergence est $O(n^{-1/(4H^*+2)})$.

Présentons maintenant les avancées faites dans le cadre de la direction de recherche (ii). La principale difficulté pour simuler $\{Z(t)\}_{t\in[0,1]}$ provient de la non Markovianité du MBM qui empêche d'utiliser le schéma d'Euler classique. Afin de simplifier notre présentation, nous allons désormais nous focaliser sur les MVS multifractionnaire linéaire. En développant pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $s\mapsto X(s,\omega)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ dans la base de Haar $\{h_0\}\cup\{h_{j,k}:\, j\in\mathbb{N},\, 0\le k\le 2^j-1\}$ de $L^2([0,1])$ et en utilisant la propriété d'isométrie de l'intégrale d'Itô, on a pu montrer que,

$$\int_0^t X(s)\,dB_1(s)=a_0(t)\lambda_0+\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}a_{j,k}(t)\lambda_{j,k}, \tag{10.2}$$

où $a_0(t)=\int_0^t X(s)\,ds$, $a_{j,k}(t)=\int_0^t X(s)h_{j,k}(s)\,ds$ et $\{\lambda_0\}\cup\{\lambda_{j,k}:\, j\in\mathbb{N},\, 0\le k\le 2^j-1\}$ est une suite de variables aléatoires Gaussiennes i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ qui ne dépend pas de t ; signalons aussi que cette suite est (stochastiquement) indépendante du processus $\{a_0(t):\, t\in[0,1]\}\cup\{a_{j,k}(t):\, j\in\mathbb{N},\, 0\le k\le 2^j-1,\, t\in[0,1]\}$. A priori la série (10.2) est convergente dans $L^2(\Omega)$ pour tout t fixé ; cependant lorsque $H(\cdot)$ est à valeurs dans $]1/2,1[$, au moyen de fines estimations des $a_{j,k}(t)$ et des $\lambda_{j,k}$, on a réussi à prouver qu'elle converge en fait en un sens beaucoup plus fort : presque sûrement dans tous les espaces de Hölder $C^\gamma([0,1])$ d'exposant $\gamma<1/2$. Cela entraîne, de façon immédiate, que presque sûrement $\beta_Z([0,1])\ge 1/2$, où $\beta_Z([0,1])$ désigne l'exposant Hölder global du processus Z sur l'intervalle $[0,1]$. De plus, lorsqu'on souhaite simuler une trajectoire de ce processus, grâce à la décomposition (10.2), la fonction aléatoire $\int_0^{\cdot} X(s)\,dB_1(s)$ peut, presque sûrement, être approximée par la somme finie $a_0(\cdot)\lambda_0 + \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{j,k}(\cdot)\lambda_{j,k}$ et on a pu montrer que l'erreur d'appoximation, en norme $C^\gamma([0,1])$, est un $O(J^{-(1/2-\gamma)})$.

Avant de clore cette sous-section, signalons que Peng suit régulièrement le séminaire SCAM de l'Université Paris 12. Par ailleurs il a déjà participé à plusieurs congrès et a exposé certains de ses travaux aux “journées de Probabilités 2008” ainsi qu'à “Fractal Geometry and Stochastics 4” (cette conférence a eu lieu en septembre dernier à Greifswald en Allemagne). Enfin, Peng a été invité en janvier dernier par Gloter à l'Université Marne-la-vallée pour exposer ses travaux au groupe de travail “méthodes stochastiques et finance”.

10.2 Thèse de Hamonier Julien

Depuis septembre 2008, je dirige tout seul la thèse de Hamonier Julien qui, de façon générale, porte sur l'étude, à la fois d'un point de vue probabiliste et d'un point de vue statistique, de certains processus Multifractionnaires Stables. Hamonier est inscrit à l'Université Lille I. Il a pu obtenir une allocation de recherche ordinaire ainsi qu'un poste de moniteur à l'UFR de Mathématiques. Je vais maintenant faire un descriptif de son sujet et de l'état d'avancement de sa thèse.

Rappelons que, de façon analogue au DFSL (voir la sous-section 8.4.1), le Mouvement Fractionnaire Stable Linéaire (MFSL), que nous notons par $\{B_{H,\alpha}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, est le processus Strictement α Stable obtenu en remplaçant, dans la représentation sous forme de moyenne mobile non anticipative du MBF $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, la mesure Gaussienne par une mesure Strictement α Stable. Par analogie à la définition du MBM dans le cadre Gaussien (voir la sous-section 8.2.1), Stoev et Taqqu (2004 et 2005) ont introduit dans le cadre Stable, en substituant à son paramètre de Hurst H une fonction déterministe $H(t)$, une extension du MFSL appelée Mouvement Multifractionnaire Stable Linéaire (MMSL), que nous notons par $\{X_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. L'une des principales motivations de ces deux auteurs était de proposer un modèle permettant de rendre compte de la non Gaussianité des traces du trafic sur les réseaux Internet ainsi que des variations de leur indice d'auto-similarité au cours du temps. Stoev et Taqqu ont étudié certaines propriétés stochatiques de $\{X_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$; plus précisément, ils ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir sa continuité en probabilité et ils ont montré que ce processus est localement asymtotiquement auto-similaire d'indice $H(t)$ en tout point t vérifiant, $H(s)-H(t)=o(|s-t|^{H(t)})$ lorsque $s\to t$. Ces deux auteurs ont également obtenu trois principaux résultats concernant les trajectoires de $\{X_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Le premier est que ces trajectoires sont bornées sur un intervalle borné arbitraire I si et seulement si $\inf_{t\in I} H(t)\geq 1/\alpha$. Le deuxième résultat donne une condition suffisante (on va voir un peu plus loin qu'elle n'est pas nécessaire) pour avoir la continuité de ces trajectoires : il suffit que la fonction $H(\cdot)$ soit Hölderienne et vérifie $H(t)>1/\alpha$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Le troisième résultat donne presque sûrement un encadrement de $\beta_{X_\alpha}(I)$ (resp. $\alpha_{X_\alpha}(t)$) l'exposant de Hölder global de X_α sur un intervalle borné I (resp. l'exposant de Hölder ponctuel de X_α en un point arbitraire t).

Le sujet de thèse de Hamonier consiste, en principe, en les trois directions de recherche suivantes :

(i) Approfondir l'étude des propriétés de régularité trajectorielle du MMSL.

(ii) Par analogie à la définition du MBM Généralisé dans le cadre Gaussien (voir la sous-section 8.2.1) définir un MMSL Généralisé dans le cadre Stable et étudier ses propriétés de régularité et d'auto-similarité.

(iii) Etudier le problème statistique de l'estimation des exposants de Hölder du MMSL et du MMSL Généralisé.

Pour le moment une avancée significative a été faite dans le cadre de la direction de recherche (i). Plus précisément, on s'est placé sous la condition $\inf_{t\in\mathbb{R}} H(t) > 1/\alpha$. En s'inspirant alors de [2], on a pu introduire une décomposition standard en série aléatoire d'ondelettes du MMSL qui converge presque sûrement dans tous les espaces de Hölder $C^{\gamma}(K)$, où $K \subset \mathbb{R}$ est un intervalle compact arbitraire et où $\gamma < \min_{t\in K} H(t) - 1/\alpha$. Grâce à cette décomposition on a réussi à améliorer certains des résultats de Stoev et Taqqu mentionnés plus haut. En effet, on a montré que la continuité du paramètre fonctionnel $H(\cdot)$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir la continuité des trajectoires de X_α. De plus, concernant leur régularité de Hölder globale, on a prouvé le résultat suivant : pour tout intervalle compact I vérifiant $H(\cdot) \in C^{\delta}(I)$, avec $\delta > \max_{t\in I} H(t)$, on a presque sûrement $\beta_{X_\alpha}(I) = \min_{t\in I} H(t) - 1/\alpha$.

Avant de clore cette sous-section, signalons que Hamonier suit régulièrement le séminaire SCAM de l'Université Paris 12 et qu'il a participé au Workshop "Models and Images for Porous Media"qui s'est tenu à l'Université Paris V en janvier dernier.

11 Participation à des jurys de thèse

- **Examinateur de la thèse de Kaim Michael** "Propriétés des lois des fonctionnelles définies sur des processus empiriques : conditions d'absolu continuité" soutenue à l'Université Lille 1 le 28 septembre 2005.

- **Rapporteur sur la thèse de Li Xiaolong** "Etude du processus de Mumford" soutenue à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan le 3 mars 2006.

- **Rapporteur sur la thèse de Barrière Olivier** "Synthèse et estimation de Mouvements Browniens Multifractionnaires monodimensionnels et bidimensionnels. Etude de processus à régularité prescrite" soutenue à l'École Centrale de Nantes le 28 novembre 2007.

- **Président et rapporteur sur la thèse d'Echelard Antoine** "Analyse 2-microlocale et application au débruitage" soutenue l'École Centrale de Nantes le 28 novembre 2007.

- **Rapporteur sur la thèse de Schack Helga** "An optimal wavelet series expansion of the Riemann-Liouville process" soutenue en mai 2008 en Allemagne à Friedrich-Schiller-Universität Jena.

- **Rapporteur sur la thèse de Baraka Driss** "Propriétés fines des trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire" soutenue en décembre 2008 en Suisse à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

12 Direction de mémoires en M2 recherche Maths Appliquées

→ El Haddad Rami "Construction de bases d'ondelettes pour la décomposition du Mouvement Brownien Fractionnaire" (ENS Cachan et Université Saint Joseph à Beyrouth, été 04).
→ Herbert Tchahou Nkwimi "Propriétés des cascades de Yaglom" (Université Lille 1, 05-06).
→ El Hassane Brahmi "Estimation de fonctionnelles de Mouvements Browniens Fractionnaires" (Université Lille 1, 05-06).
→ Peng Qidi "Estimation des intégrales de fonctionnelles du Mouvement Brownien Multifractionnaire" (Université Lille 1, 06-07).
→ Ming Jing "Champs Gaussiens anisotropes" (Université Lille 1, 08-09).

13 Activités d'enseignement

J'enseigne depuis 15 **ans environ** et je suis intervenu **dans plusieurs types d'établissements** (universités, classes préparatoires, ...), cela m'a donné l'occasion d'avoir **différentes catégories d'étudiants** (des non scientifiques, des scientifiques, de bons étudiants, des étudiants en difficulté scolaire, ...) et **d'enseigner la Statistique, les Probabilités, d'autres cours de Mathématiques et le langage Informatique Turbo Pascal.**

13.1 Université Lille I

Dans le cadre de ma fonction de Professeur, j'enseigne à cette Université **depuis le 1/09/04**. La plupart de mes enseignements ont eu lieu et ont lieu à **l'Institut de l'Administration des Entreprises (IAE)**. Parallèlement, **j'ai donné pendant ces 4 dernières années un cours d'Analyse Fonctionnelle en M2 recherche de Mathématiques Appliquées**.

- **Analyse Fonctionnelle Appliquée en M2 recherche de mathématiques Appliquées.** Il s'agit d'un cours fondamental destiné essentiellement à combler certaines lacunes des étudiants et à compléter leurs connaissances afin qu'ils puissent mieux suivre d'autres enseignements du M2. Les grandes lignes du programme sont : le Théorème de Stone-Weierstrass, les espaces L^p, les espaces de Fréchet, le Théorème de Banach-Steinhaus, le Théorème de l'application ouverte, le Théorème de Hahn-Banach, la topologie faible et la topologie faible $*$, la transformée de Fourier et les distributions tempérées.
  → J'ai donné cet enseignement pendant ces 4 dernières années, son volume horaire est de 24 heures de cours.
- **Encadrement de 4 mini-projets en M2 recherche de Mathématiques Appliquées (05-06)**.
- **Processus Markoviens (chaînes de Markov) et modèles de survie en M2 de Marketing EAMC.** En marketing lorsqu'il s'agit de modéliser le comportement du client en vue de calculer sa valeur actualisée, on utilise essentiellement deux catégories de modèles : les modèles de rétentions et les modèles de migrations. L'objectif de ce cours et de présenter certains outils mathématiques nécessaires à la compréhension de ces modèles.
  → Je donne cet enseignement depuis 5 ans, son volume horaire est de 24 heures de cours.
- **Modèles prédictifs en M2 de Marketing EAMC.** L'objectif de ce cours de statistisque est de présenter certaines méthodes explicatives. Les grandes lignes du programme sont : régression univariée, régression multivariée, régression logistique, analyse discriminante et arbres de décision.
  → Je donne cet enseignement depuis 5 ans, son volume horaire est de 24 heures de cours.
- **Lois de probabilités en M2 de Marketing EAMC.** Les lois de probabilités sont utiles en Marketing et la plupart des étudiants du M2 EAMC n'ont pas eu l'occasion de les étudier de façon approfondie dans leur formation antérieure, c'est pour cela que je leur enseigne ce cours. Les grandes lignes du programme sont : analyse combinatoire, probabilités, probabilités conditionnelles, variables aléatoires, lois classiques (binomiale, géométrique, hypergéométrique, Poisson, normale,...) et approximation d'une loi par une autre loi plus simple.
  → Je donne cet enseignement depuis 2 ans, son volume horaire est de 21 heures de cours.
- **Statistique et techniques quantitatives en L2 Gestion & Commerce.** Il s'agit d'un cours de statistique descriptive de base. Les grandes lignes du programme sont : représentation graphique d'une variable, valeurs centrales, indicateurs de dispersion, coefficient de corrélation et droite de régression.
  → Je donne cet enseignement depuis 4 ans, son volume horaire est de 21 heures de cours.

- **Probabilités en L3 IUP Marketing & Vente.** L'objectif de ce "cours-td" est d'introduire certaines notions de calculs de probabilités de base. Les grandes lignes du programme sont analyse combinatoire, probabilités et probabilités conditionnelles. **Le volume horaire d'un groupe de "cours-td" est de 16 heures de "cours-td".**
  → **Depuis deux ans je suis chargé de deux groupes.**
- **Raisonnements et politiques financières en maîtrise de Sciences de Gestion.** L'objectif principal de ce "cours-td" de gestion est de présenter en détail les deux principaux mode de financements d'une société (financement par capitaux propres et financement par endettement) ainsi que la célèbre théorie de Modigliani-Miller.
  → **J'ai donné cet enseignement pendant 3 années consécutives de 04 à 07, son volume horaire est de 30 heures de "cours-td".**
- **Probabilités en L2 (UFR de Maths et UFR d'Informatique).** Il s'agit de donner aux étudiants des connaissances de base en calcul des probabilités. Les grandes lignes du programme sont : probabilités, probabilités conditionnelles, variables aléatoires discrètes, loi binomiale et loi de Poisson. **Le volume horaire d'un groupe de TD est de 15 heures.**
  → **En 04-05,** j'ai été chargé de deux groupes de TD.
  → **En 05-06,** j'ai été chargé d'un groupe de TD.
- **Ateliers de Mathématiques en L1 (UFR de Maths).** L'objectif de ce "cours-td" optionnel est de donner aux étudiants une connaissance plus approfondie de certains sujets, notamment l'arithmétique. **Le volume horaire d'un groupe est de 45 heures de "cours-td" environ.**
  → **En 04-05,** j'ai été chargé d'un groupe.

13.2 Université Toulouse III Paul Sabatier

Dans le cadre de ma fonction de Maître de Conférence, j'ai enseigné à cette Université **pendant 4 années consécutives du 1/09/99 au 31/08/03** et j'ai eu l'occasion d'intervenir dans les modules suivants.

- **Probabilités et Statistique en Licence de Mathématiques pour l'enseignement**. Il s'agit essentiellement d'un cours de base destiné aux étudiants qui s'orientent vers la préparation du CAPES. Dans ce cours, on introduit les notions de variable aléatoire, de loi et de densité de probabilités, de Théorème du transport, de loi des grands nombres, de Théorème Central Limite, d'estimateur et de test.
  → **Pendant 2 années consécutives, en 00-01 et en 01-02**, j'ai été responsable de l'enseignement de la partie Probabilités du cours magistral.
  → **Pendant 3 années consécutives, de 99-00 à 01-02**, j'ai été chargé d'un groupe de TD.

- **Analyse 1, en première année du Magistère d'Economiste Statisticien**. Il s'agit essentiellement d'une remise à niveau destinée aux étudiants en provenance de DEUG de Science Economique. Dans ce module on rappelle et/ou on introduit, les principaux outils qui permettent l'étude des suites, des séries et des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (raisonnement par récurrence, convergence, limite, continuité, dérivabilité, intégration et intégration impropre).
  → **J'ai enseigné ce module pendant 3 années consécutives de 00-01 à 02-03**. Compte tenu de sa spécificité je devais faire à la fois le cours et les TD. J'ai rédigé un polycopié.
- **Analyse 2, en première année du Magistère d'Economiste Statisticien**. Il s'agit essentiellement, d'une remise à niveau déstinée aux étudiants provenant de DEUG de Science Economique (ceux qui avaient suivi Analyse 1) mais également aux étudiants en provenance de DEUG MASS. Aussi, il fallait s'adapter à un public de niveau hétérogène. Dans ce module on rappelle et/ou on introduit les principaux outils qui permettent l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ (topologie dans $\mathbb{R}^n$, calcul différentiel, intégrale multiple).
  → **J'ai enseigné ce module pendant 3 années consécutives de 00-01 à 02-03**. Compte tenu de sa spécificité je devais faire à la fois le cours et les TD.
- **Evalution de mémoires de stage de première, deuxième et troisième année du Magistère d'Economiste Statisticien, pendant 3 années consécutives de 00-01 à 02-03**
- **Calcul différentiel en licence de Mathématiques fondamentales**. Ce module s'adresse notamment à des étudiants qui s'orientent vers la préparation de l'agrégation de Mathématiques. On y introduit des techniques assez poussées de calcul différentiel sur des espaces de Banach ainsi que des méthodes de résolution d'équations différentielles (essentiellement le Théorème de Cauchy-Lipschitz).
  → **J'ai été chargé d'un groupe de TD pendant l'année 01-02**.
- **UF1 Analyse, en première année de DEUG MIAS**. Ce module porte principalement sur les formules de Taylor, l'intégration et les courbes paramétrées.
  → **J'ai été chargé de 2 groupes de TD pendant 2 années consécutives, en 99-00 et en 00-01**.
- **UF0 en première année de DEUG MIAS**. Ce module de Mathématiques Générales, porte principalement sur la théorie des ensembles, les suites, les limites, la continuité et la dérivabilité.
  → **J'ai été chargé d'un groupe de TD, pendant l'année 02-03**.
- **UF1-SM en première année de DEUG SM**. Dans ce module on présente les principaux outils d'Analyse qui permettent d'étudier les fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.
  → **J'ai été chargé de 2 groupes de TD pendant l'année 99-00**.
- **UF0 en première année de DEUG SM**. Ce module porte principalement sur les suites, les limites, la continuité, la dérivabilité et l'intégration.
  → **J'ai été chargé d'un groupe de TD, pendant l'année 99-00**.

13.3 Université Paris IX Dauphine

J'ai été **vacataire pendant les deux années 93-94 et 96-97**. Ensuite, j'ai été **ATER à temps complet pendant les deux années consécutives 97-98 et 98-99**. J'avais fait tous mes enseignements en **DEUG de Gestion et Economie Appliquée**. Ils portaient sur des notions de base **d'Algèbre Linéaire** (définition et principales propriétés de $\mathbb{R}^n$, matrices, résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss, espaces vectoriels), et des notions de base **d'Analyse** (topologie, calcul différentiel, intégrales multiples, optimisation libre et sous contraintes). Compte tenu de la spécificié de ce DEUG, chaque enseignant, doit assumer à la fois le cours, les exercices et le contrôle des connaissances.

13.4 Lycée ND du Grandchamp (Versailles)

chargé de TD et colleur (vacataire) pendant 3 ans en **classes préparatoires HEC**.

13.5 Institut des Sciences et Techniques Humaines (Paris)

Enseignant de mathématiques vacataire pendant 1 an en **classes préparatoires HEC et Sciences politiques**.

13.6 Ecole Nationale de Commerce (Paris)

J'ai donné, pendant un 1 an en tant que vacataire des TP d'informatique (langage Pascal)en **classes préparatoires HEC**.

14 Activités d'administration et autres responsabilités collectives

- A partir du printemps prochain et pendant les trois prochaines années, je serai très vraisemblablement **membre de comités de sélection** de l'université Lille 1, en Mathématiques Appliquées (section 26).

- Je suis **membre du conseil** du laboratoire de Mathématiques Paul Painlevé depuis début janvier 2006.

- J'ai été **membre de la commission des spécialistes** de Sciences de Gestion (section 06) de l'université Lille 1 pendant 2 années consécutives (en 2007 et en 2008).

- Je suis l'un des membres de **l'ANR "Analyse Harmonique et Problèmes Inverses"** (http ://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/grellier/ANR.html). **Développer**

- J'ai été l'un des 7 organisateurs **du congrès "Les journées de Probabilités 2008"**, qui s'est tenu à Lille du 1 au 5 septembre 2008. **Les conférenciers invités étaient :** Philippe Chassaing, Francis Comets, Peter Imkeller, Grégory Miermont, Ilya Molchanov et Sergei Zuyev.

- J'ai été une 40-aine de fois **rapporteur** sur des articles soumis à des revues internationales de Mathématiques ou de traitement du signal.

- J'ai été **le responsable du Colloquium** du laboratoire de Mathématiques Paul Painlevé en 05-06.

- J'ai été **membre de la commission des spécialistes** de Mathématiques (sections 25 et 26) de l'Université d'Angers en 2003 et 2004.

- J'ai été **responsable de la gestion des prepublications** du laboratoire CMLA en 03-04.

- J'ai participé à **l'organisation du séminaire de Statistique** du laboratoire LSP en 02-03.

- J'ai participé au **GDR Isis "Analyse et modélisation de la régularité des images naturelles"**. Il a eu lieu pendant les années 02 et 03.

- J'ai participé **à l'organisation des colloques "L'Ingénieur et les Fractales 1999", "Les journées de Probabilités 2003"et "L'Ingénieur et les Fractales 2005"**.

- J'étais l'un des 4 organisateurs **du congrès international "Stochastic Processes and Random Fractals"** qui a eu lieu à Lille fin mars 06. **Les conférenciers invités étaient :** Kenneth Falconer (St Andrews), Ildar Ibragimov (St-Petersburg), Jean-Pierre Kahane (Orsay), Mikhail Lifshits (St-Petersburg), Benoit Mandelbrot (Yale), Alfredas Rackauskas (Vilnius), Jan Rosinski (Tennessee), Gennady Samorodnitsky (Cornell), Stanislav Smirnov (Genève), Dalibor Volny (Rouen) et Wendelin Werner (Orsay)

15 Invitations à l'étranger

- Pour 6 semaines (en Décembre et Janvier 99-00) par W.M. Lawton à **National University of Singapore**.

- Pour 1 semaine en Janvier 03 par F. Spizzichino à **Università La Sapienza, Rome**.

- Pour 4 semaines en (Juillet et Août 03) par Y. Xiao à **Michigan State University, USA**.

- Conférencier invité (fin Mai 04) à **Second International Conference on Computational Harmonic Analysis, Vanderbilt University, USA**.

- Conférencier invité (mi Septembre 05) à la conférence **Small Deviation Probabilities and Related Topics, Steklov Institut, St.Petersburg, Russie.**

16 Invitations en France

- Par les Universités de Amiens, Besançon, Clermont-Ferrand 2, Dijon, Évry, Grenoble 1, Lille 1, Nice, Orléans, Paris 6, Paris 12, Paris 13, Rennes 1, Bretagne-Sud (Vannes) et Toulouse 3.

- Plusieurs fois par l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.

- Conférencier invité à la journée "Processus et champs fractionnaires" qui a eu lieu à la Rochelle le 28 janvier 2008.

- Conférencier invité au Séminaire Cristolien d'Analyse Multifractale (Université Paris 12) le 25 janvier 2007

- Conférencier invité au groupe de travail "Apects Fractals" le 14 mars 2007.

- Conférencier invité aux journées "Techniques Fractales" qui ont eu lieu à Orléans les 22 et 23 mai 2008.