Université de Lille
Licence Mathématiques 2ème année

Année 2017-2018
Semestre 4

M42 – un corrigé de l'examen du mercredi 23 mai 2018

Exercice 1 (questions de cours). (1) *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.*

(a) *Soit f une forme linéaire non nulle de E. Montrer que le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f est un hyperplan de E.*

Correction. Comme f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Comme f est non nulle, $\dim \operatorname{Im} f \geqslant 1$, d'où $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ puisque $\dim \mathbb{R} = 1$. On déduit alors du théorème du rang que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim E - 1$ et donc $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } f \text{ est forme linéaire non nulle de } E\text{, son noyau est un hyperplan de } E.}$

(b) *Réciproquement, soit H un hyperplan de E. Montrer que H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.*

Correction. Choisissons un supplémentaire D de H dans E. On a $\dim H + \dim D = \dim E$ donc D est une droite vectorielle de E puisque $\dim H = \dim E - 1$ en tant qu'hyperplan de E. Soit v une base de D (tout vecteur non nul de D convient). On définit une forme linéaire f de E de la manière suivante. Soit x dans E. Il s'écrit de façon unique $x = x_H + \lambda_x v$, avec $x_H \in H$ et $\lambda_x \in \mathbb{R}$. On pose alors $f(x) = \lambda_x$. En particulier $f(v) = 1$. Par construction, f est une application linéaire (vérification facile) et f est à valeurs dans $\mathbb{R}$; c'est donc une forme linéaire de E. De plus,

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid \lambda_x = 0\} = \{x \in E \mid x = x_H\} = H.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Tout hyperplan de } E \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle de } E.}$

(2) *Parmi les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ ci-dessous, précisez celles qui*

(a) représentent la matrice d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de $\mathbb{C}^2$,

(b) représentent la matrice d'une forme sesquilinéaire hermitienne de $\mathbb{C}^2$,

(c) représentent la matrice d'un produit scalaire hermitien de $\mathbb{C}^2$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque cas, justifier soigneusement les réponses.

Correction.

(a) $\boxed{\text{Les matrices } A_2,\ A_4 \text{ et } A_5 \text{ représentent les matrices de formes bilinéaires symétriques non dégénérées}}$. En effet, elles sont symétriques, i.e., $A = {}^t A$, et de rang 2. Les autres matrices ne sont pas symétriques.

(b) $\boxed{\text{Les matrices } A_1,\ A_3 \text{ et } A_5 \text{ représentent les matrices de formes sesquilinéaires hermitiennes}}$. En effet, elles sont hermitiennes car $A = A^* = {}^t\overline{A}$. Les autres matrices ne sont pas hermitiennes.

(c) Les matrices qui représentent les matrices de produits scalaires hermitiens de $\mathbb{C}^2$ sont parmi celles de (b), c'est-à-dire A_1, A_3 et A_5. La matrice A_1 est de rang 1, car $C_2 = (-i) \times C_1$, où C_1 et C_2 sont les colonnes de A_1. Plus précisément, les valeurs propres de A_1 sont 0 et 2 donc A_1 est positive, mais non définie positive. Les valeurs propres de A_3 sont 2 et 1 donc A_3 est définie positive. La matrice A_5 est symétrique réelle, et c'est une matrice orthogonale. Ses valeurs propres sont donc 1 et -1 et A_5 n'est pas positive.

En conclusion, $\boxed{\text{seule la matrice } A_3 \text{ représente la matrice d'un produit scalaire hermitien de } \mathbb{C}^2}$.

Exercice 2 (étude d'une forme quadratique réelle)**.** *Soit* $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *l'application définie par :*

$$q\big((x,y,z)\big) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2.$$

(1) *Vérifier que* q *est une forme quadratique et déterminer la forme polaire, que l'on notera* φ*, associée à* q*.*

Correction. L'application q est une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ en tant que polynôme homogène de degré de $\mathbb{R}^3$.

On pose pour (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$,

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2(xy' + x'y) + 3(xz' + x'z) + 4yy' + 8(yz' + y'z) + 9zz'.$$

On vérifie sans peine que φ est une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$ et que $\varphi((x,y,z),(x,y,z)) = q((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, donc q est une forme quadratique de forme polaire φ.
Remarque : en exhibant une une forme bilinéaire symétrique φ de $\mathbb{R}^3$ et que $\varphi((x,y,z),(x,y,z)) = q((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on remontre que q est une forme quadratique.

Conclusion : $\boxed{q \text{ est une forme quadratique de } \mathbb{R}^3.}$

(2) *Donner la matrice de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*.*

Correction. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}}.$$

(3) *Décomposer* q *en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de* q*.*

Correction. On applique l'algorithme de Gauss pour décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes :

$$\begin{aligned} q\big((x,y,z)\big) &= x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2 \\ &= (x + 2y + 3z)^2 - 4y^2 - 9z^2 - 12yz + 4y^2 + 16yz + 9z^2 \\ &= (x + 2y + 3z)^2 + 4yz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 + (y + z)^2 - (y - z)^2 \end{aligned}$$

En posant pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\ell_1(x,y,z) = x + 2y + 3z, \qquad \ell_2(x,y,z) = y + z, \qquad \ell_1(x,y,z) = y - z,$$

on a

$$q = \ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2.$$

On sait d'après le cours que ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont linéairement indépendantes.

Conclusion : $\boxed{\text{On a } q = \ell_1^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2. \text{ La signature de } q \text{ est donc } (2,1), \text{ et son rang est } 3.}$

(4) *Déterminer une base* φ*-orthogonale de* $\mathbb{R}^3$*, c'est-à-dire une base* $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que :*

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad i \neq j, \quad \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.$$

Correction. Comme ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont linéairement indépendantes dans $(\mathbb{R}^*)^3$ qui est de dimension 3, (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de $(\mathbb{R}^*)^3$. Déterminons la base anté-duale $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). On pose $\varepsilon_1 =$

(x_1, y_1, z_1), $\varepsilon_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\varepsilon_3 = (x_3, y_3, z_3)$. On résout

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 1 \\ y_1 + z_1 = 0 \\ y_1 - z_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0 \\ y_2 + z_2 = 1 \\ y_2 - z_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + 2y_3 + 3z_3 = 0 \\ y_3 + z_3 = 0 \\ y_3 - z_3 = 1. \end{cases}$$

On obtient $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\varepsilon_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ Comme $\varphi(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \ell_i(u)\ell_i(v)$, on voit que $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base φ-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\boxed{\text{les vecteurs } \varepsilon_1 = (1,0,0),\ \varepsilon_2 = (-\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}),\ \varepsilon_3 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \text{ forment une base } \varphi\text{-orthogonale de } \mathbb{R}^3.}$

(5) *Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathscr{E}$?*

Correction. La matrice de φ dans la base $\mathscr{E}$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

(6) *Pour tout réel λ, on note $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ et F_λ l'orthogonal de v_λ pour φ.*

(a) *À quelle condition sur le réel λ, le vecteur v_λ est-il un vecteur isotrope pour q ?*

Correction. Par définition, $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ est un vecteur isotrope pour q si et seulement si $q(v_\lambda) = 0$, c'est-à-dire, $\lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda + 4 - 16 + 9 = 0 \iff \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$. Les racines du polynôme $x^2 + 2x - 3 = 0$ sont 1 et -3.

Conclusion : $\boxed{v_\lambda \text{ est un vecteur isotrope pour } q \text{ si et seulement si } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -3.}$

(b) *Montrer :* $\dim F_\lambda = 2$.
(Indication : on pourra remarquer que F_λ est le noyau d'une certaine forme linéaire non nulle ; tout autre méthode correcte permettant de conclure sera acceptée bien entendu.)

Correction. Par définition de F_λ, on a

$$F_\lambda = v_\lambda^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(v_\lambda, (x,y,z)) = 0\}.$$

L'ensemble F_λ est donc le noyau de la forme linéaire

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \longmapsto \varphi(v_\lambda, (x,y,z)).$$

Si $\varphi(v_\lambda, (x,y,z)$ était nul pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors v_λ serait dans le noyau de φ, ce qui est impossible car φ est non dégénérée (q est de rang 3) et $v_\lambda \neq (0,0,0)$. On en déduit que la forme linéaire f est non nulle. D'après l'exercice 1 (1), on en déduit que F_λ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\boxed{\dim F_\lambda = \dim \mathbb{R}^3 - 1 = 2.}$

(c) *À quelle condition sur le réel λ a-t-on une décomposition en somme directe $F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda$? Justifier la réponse.*

Correction. Comme $\dim F_\lambda + \dim \mathbb{R}v_\lambda = 2 + 1 = 3$ d'après la question (6) (c), on a $F_\lambda + \mathbb{R}v_\lambda = F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda$ si et seulement si $F_\lambda \cap \mathbb{R}v_\lambda = \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si, $v_\lambda \in F_\lambda = v_\lambda^\perp$, i.e., $\varphi(v_\lambda, v_\lambda) = q(v_\lambda) = 0$.
Or on sait d'après la question (6) (a) que $q(v_\lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \{1, 3\}$.

Conclusion : $\boxed{\text{On a une décomposition en somme directe } F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda \text{ si et seulement si } \lambda \in \{1,3\}.}$

Exercice 3 (éléments caractéristiques d'une rotation vectorielle). *On considère la matrice*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. L'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

(1) *Montrer que u est une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un élément de $SO(\mathbb{R}^3)$. Justifier soigneusement la réponse.*

Correction. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On remarque que

$$\|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2+2^2+1^2} = 1.$$

De plus, C_1, C_2, C_3 sont deux à deux orthogonales. Ceci prouve que A est une matrice de $O(3)$.

Par ailleurs, on vérifie par calcul que $\det A = 1$ donc $A \in SO(3)$.

Comme A est la matrice de u dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, $\boxed{u \text{ est une rotation vectorielle de } \mathbb{R}^3}$.

(2) *À l'aide d'un résultat du cours, justifier que* 1 *est une valeur propre de u et que l'espace propre de u associé à la valeur propre est de dimension 1.*

Correction. Comme $A \neq I_3$, l'endomorphisme u n'est pas l'identité. D'après le cours, on sait alors que 1 est une valeur de propre de u et que $\dim\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 1$.

Conclusion : $\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } u \text{ et } \dim\ker(u-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 1.}$

(3) *Déterminer l'axe Δ et la mesure d'angle θ de la rotation u.*

Correction. On résout $AX = X$, c'est-à-dire $(A - I_3)X = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
(A - I_3)X = 0 &\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Posons $f = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. Orientons la droite $\mathrm{Vect}(1,1,-1)$ par f ; c'est l'axe de la rotation u.

Notons θ la mesure d'angle de u par rapport à cet axe. On sait que $1 + 2\cos\theta = \mathrm{Tr}(A) = 2$, d'oú $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$. Déterminons le signe de $\sin\theta$. Notons $e_1 = (1,1,1)$ le premier vecteur de la base canonique. Comme e_1 et f ne sont pas colinéaires, on sait d'après le cours que $[e_1, u(e_1), f]$ est du signe de $\sin\theta$. Or

$$[e_1, u(e_1), f] = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \times 3 > 0.$$

Conclusion : $\boxed{\text{l'axe } \Delta \text{ est la droite engendrée et orientée par } f = (1,1,-1), \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3} \mod 2\pi.}$

Remarque : si on avait choisit une orientation opposée pour l'axe, l'angle aurait été $\theta = -\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$.

Exercice 4 (valeurs propres d'un endomorphisme hermitien et norme subordonnée)**.** *Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire hermitien sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée. Si f est un endomorphisme de E, on définit la* norme subordonnée *de f par :*

$$|||f||| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}.$$

On ne demande pas de justifier que ceci définit bien une norme sur $\mathscr{L}(E)$ (voir le cours d'analyse).

(1) *Soit u un endomorphisme hermitien de E.*

(a) *Montrer que les valeurs propres de u sont réelles. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u, ordonnées de sorte que $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$.*

Correction. Soit λ une valeur propre pour u, et soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors par semi-linéarité à gauche du produit scalaire, $(u(x)|x) = \overline{\lambda}(x|x) = \overline{\lambda}\|x\|^2$. D'autre part, comme u est hermitien, $u = u^*$, et par linéarité à droite du produit scalaire, $(u(x)|x) = (x|u(x)) = \lambda(x|x) = \lambda\|x\|^2$. Comme $x \neq 0_E$, on a $\|x\|^2 \neq 0$, d'où $\overline{\lambda} = \lambda$, i.e., $\lambda \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } u \text{ sont réelles.}}$

(b) *Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Établir l'inégalité : $\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} \leqslant \lambda_n$. En déduire :*

$$\sup\left\{\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\} \leqslant \lambda_n.$$

Correction. Soient $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n formée de vecteurs propres pour u. On peut l'ordonner de sorte que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Une telle b.o.n existe car u est un endomorphisme hermitien. On a $x = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$, d'où $u(x) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)u(e_i) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)\lambda e_i$ car u est linéaire. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n, que $(\ |\ )$ est semi-linéaire à gauche et que les λ_i sont réels, on en déduit :

$$\begin{aligned}(u(x)|x) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)\lambda e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n}(e_j|x)e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i(e_i|x)}(e_i|x) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|(e_i|x)|^2\end{aligned}$$

Comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \leqslant \lambda_n$, on obtient :

$$(u(x)|x) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|(e_i|x)|^2 \leqslant \lambda_n\sum_{i=1}^{n}|(e_i|x)|^2 = \lambda_n\|x\|^2.$$

Comme $\|x\|^2 \neq 0$, il en résulte : $\boxed{\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} \leqslant \lambda_n.}$

On en déduit que

$$\boxed{\sup\left\{\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\} \leqslant \lambda_n}.$$

(c) *Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} = \lambda_n$. En déduire que*

$$\lambda_n = \sup\left\{\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}.$$

Correction. Avec $x = e_n \neq 0_E$, on a $(u(x)|x) = (\lambda_n e_n|e_n) = \lambda_n\|e_n\|^2\lambda_n$, d'où $\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} = \lambda_n$

Conclusion : $\boxed{\text{il existe } x \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } \dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} = \lambda_n.}$

D'après la questions (1) (b), on en déduit : $\boxed{\lambda_n = \sup\left\{\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}}.$

(2) *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme quelconque de E.*

(a) *Soit $x \in E$. Montrer : $\big((f^* \circ f)(x)|x\big) = \|f(x)\|^2$.*

Correction. On a par définition de l'adjoint,

$$\big((f^* \circ f)(x)|x\big) = (f^*(f(x))|x) = (f(x)|f(x)) = \|f(x)\|^2.$$

Conclusion : $\boxed{\big((f^* \circ f)(x)|x\big) = \|f(x)\|^2.}$

(b) *Montrer que l'endomorphisme $f^* \circ f$ est un endomorphisme hermitien positif de E.*

Correction.
Première méthode : tout d'abord, l'endomorphisme $f^* \circ f$ est hermitien car $(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$. Montrons qu'il est positif. Soient λ une valeur propre de $f^* \circ f$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur propre associé. D'après la question (2) (a),

$$\|f(x)\|^2 = \big((f^* \circ f)(x)|x\big) = (\lambda x|x) = \overline{\lambda}\|x^2\|.$$

Comme $\|x^2\| \neq 0$, on en déduit que $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ et que $\overline{\lambda} = \lambda \geqslant 0$.

Autre méthode (plus rapide) : D'après la question (2) (a), $\big((f^* \circ f)(x)|x\big) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. D'après le cours, on sait que cela implique que $f^* \circ f$ est hermitien positif.

Conclusion : $\boxed{f^* \circ f \text{ est un endomorphisme hermitien positif de } E.}$

(c) *Déduire de la question (2) (a) que l'on a :*

$$|||f|||^2 = \sup\left\{\frac{\big((f^* \circ f)(x)|x\big)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$$

Correction. Par définition de la norme triple, on a :

$$|||f||| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\},$$

d'où

$$|||f|||^2 = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}.$$

D'après la question (2) (a), on en déduit que

$$\boxed{|||f|||^2 = \sup\left\{\frac{\big((f^* \circ f)(x)|x\big)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}}.$$

(d) *Déduire des questions (1) (c) et (2) (c) que*

$$|||f||| = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(f^* \circ f)\}.$$

Correction. Comme $f^* \circ f$ est hermitien d'après la question (2) (b), il résulte que la question (1) (d) que

$$\sup\left\{\frac{\big((f^* \circ f)(x)|x\big)}{\|x\|^2}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\} = \max\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(f^* \circ f)\},$$

d'où d'après la question (2) (c), $|||f|||^2 = \max\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(f^* \circ f)\}$. Comme les deux membres de l'égalité sont positifs, on conclut : $\boxed{|||f||| = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(f^* \circ f)\}.}$

(3) *Application. Déterminer $|||f|||$, où f est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est* $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 2i \end{pmatrix}$.

Correction. On applique le résultat de la question (2) (d) pour calculer $|||f|||$. Déterminons les valeurs propres de $f^* \circ f$. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 2i \end{pmatrix}$ est calculons les valeurs propres de A^*A. On a $A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5i \\ -5i & 5 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A^*A sont 0 et 10.

Conclusion : $\boxed{|||f||| = \sqrt{10}.}$